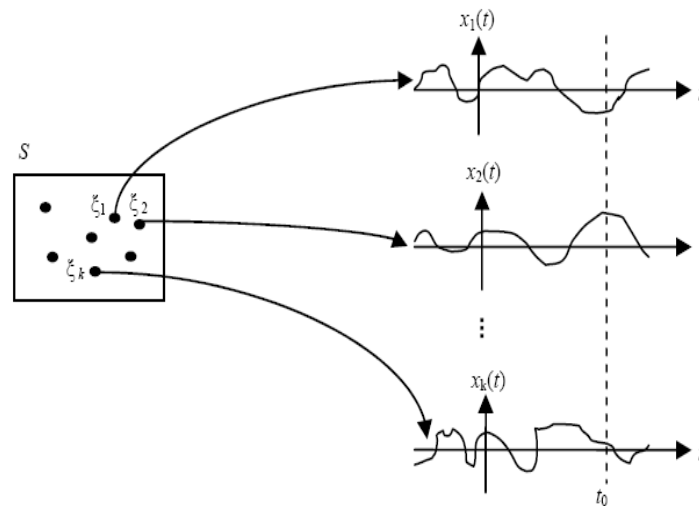


4.1 INTRODUCTION

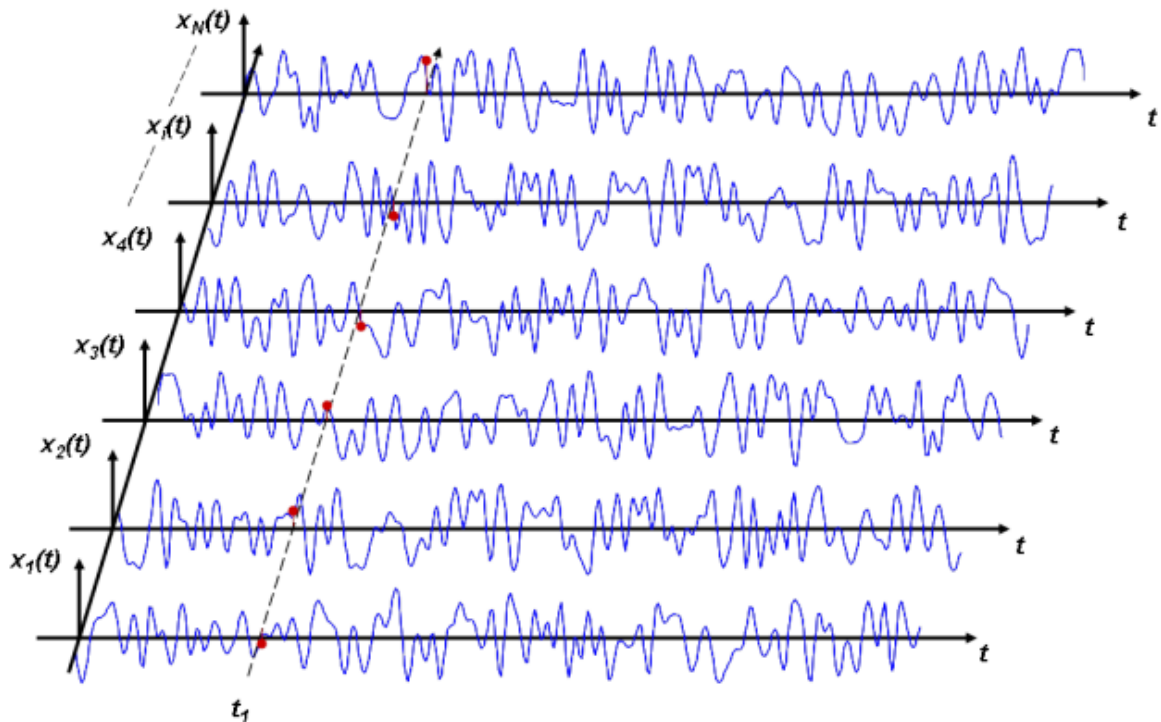
En théorie du signal, on étudie le plus souvent des grandeurs dépendant du temps et dont l'évolution semble imprévisible. L'étude du son émis par les véhicules qui passent sur une route nous donne une image concrète d'une telle grandeur (alors que le jet d'un dé est une variable aléatoire statique et indépendante du temps). Pour les modéliser, on utilise la notion du processus aléatoire qui associe à chaque épreuve une réalisation qui n'est plus une valeur comme dans le cas des variables aléatoires, mais une fonction du temps.

On définit un processus aléatoire (PA) comme une application qui, à chaque épreuve ω , fait correspondre une fonction du temps t . On utilise la notation $X(t, \xi)$ ou plus usuellement $X(t)$ dans laquelle on omet la dépendance statistique vis-à-vis de l'épreuve ξ .

Exemple de processus aléatoire



(a)



(b)

Figure 4.1 Représentation d'un ensemble de réalisations d'un processus aléatoire

Un processus peut alors être vu :

- Soit, pour une épreuve fixée ξ_0 , $X(t, \xi_0)$ comme une fonction du temps que l'on appelle trajectoire
- Soit, pour un instant fixé t_0 , $X(t_0, \xi)$ comme une variable aléatoire et $x(t_0)$ devient une valeur particulière de la va X

Exemple 4.1

Considérer le processus aléatoire $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$, où Θ est une va uniformément distribuée entre 0 et 2π , comme c'est illustré dans la Figure 4.2.

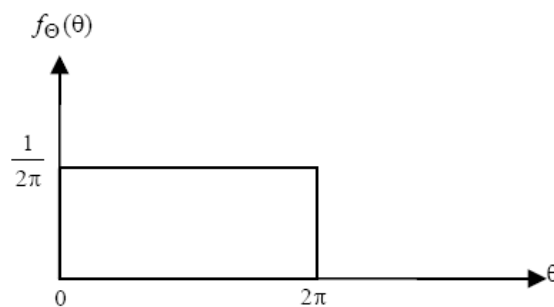


Figure 4.2 PDF Uniforme

Alors

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.1)$$

Un tel processus aléatoire, dont les valeurs futures sont prédictives à partir des valeurs précédente, est appelé prédictif. En effet, en fixant la valeur de Θ , à $\pi/4$ par exemple, la fonction $X(t, \xi_k)$ devient une fonction déterministe du temps, alors

$$x_k(t) = A \cos\left(\omega t + \left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad (4.2)$$

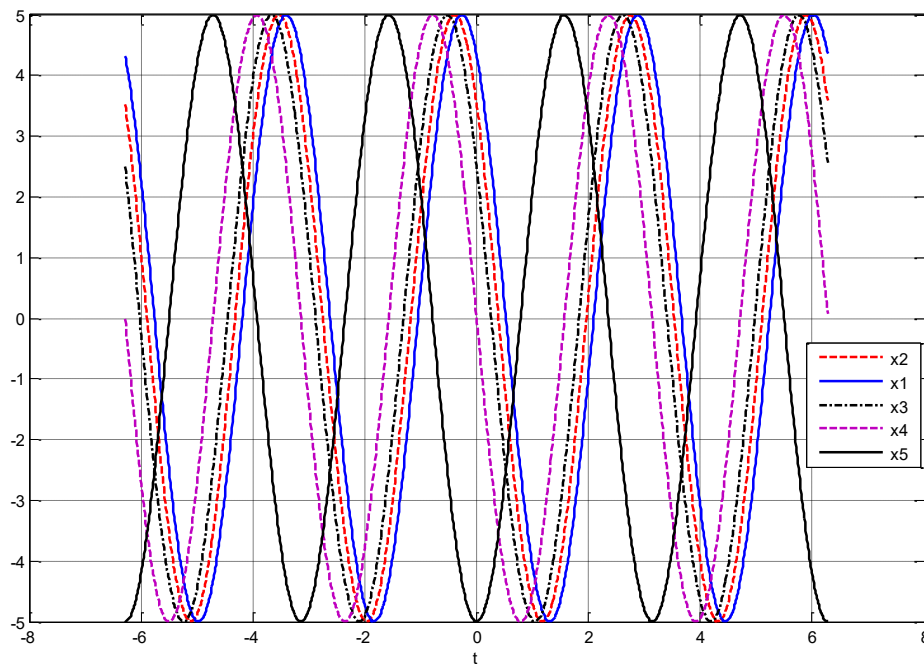


Figure 4.3 Représentation des réalisation du processus aléatoire $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$

Programme 4.1.1

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Realisations of a random signal
fs=100;% sampling frequency in HZ
tiv=1/fs;
t=-2*pi:tiv:2*pi;
% x=5*cos(fs*t+pi/4);% with a frequency 100 and phi=pi/4
% figure(1)
% plot(t,x);
% x1=5*cos(10*t+pi/4);% with a frequency fs=10 and phi=pi/4
% figure(2)

```

```

% plot(t,x1);
% x=5*cos(fs*t+pi/4);
% figure(3)
% plot(t,x);
% grid
x2=5*cos(2*t+pi/6);
hold on
plot(t,x2);
x3=5*cos(2*t+pi/3);% with a frequency fs=2 and phi=pi/3
hold on
plot(t,x3);
x4=5*cos(2*t+pi/2);
hold on
plot(t,x4);
x5=5*cos(2*t+pi);
hold on
plot(t,x5);
xlabel('t')

```

Programme4.1.2

```

%%%%%%%%%%%% Programme2.2
%%%%%%%%%%%% Uniform PDF
%%%%%%%%%%%%
v=0:0.1:1;% values set
ypdf=unifpdf(v,0,1); % uniform PDF
plot(v,ypdf,'k'); hold on;%
axis([-0.5 1.5 0 1.1]);
xlabel('values');title('uniform PDF');
plot([0 0],[0 1],'--k');
plot([1 1],[0 1],'--k');

```

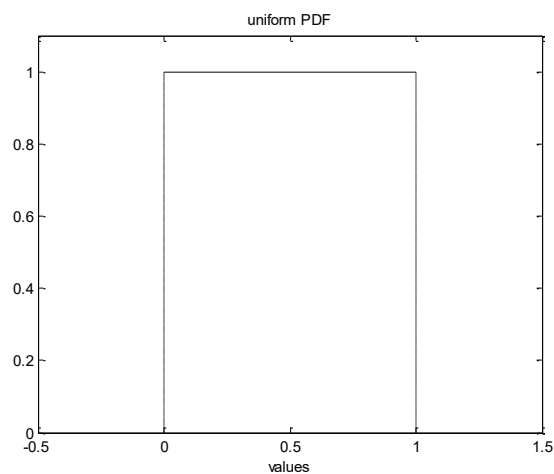


Figure 4.4 PDF uniforme

Programme 4.1.3

```

% Histogramme of a random signal with uniform PDF
fs=100;% sampling frequency in HZ
tiv=1/fs; % time interval between samples;
t=0:tiv:(100-tiv);%time intervals st (1000 values)
N=length(t);
y=rand(N,1);% random signal data set
v=0:0.02:1; % value intervals set
hist(y,v); colormap(cool); % plots histogram
xlabel('values');
title('Histogram of random signal with uniform PDF');
grid;

```

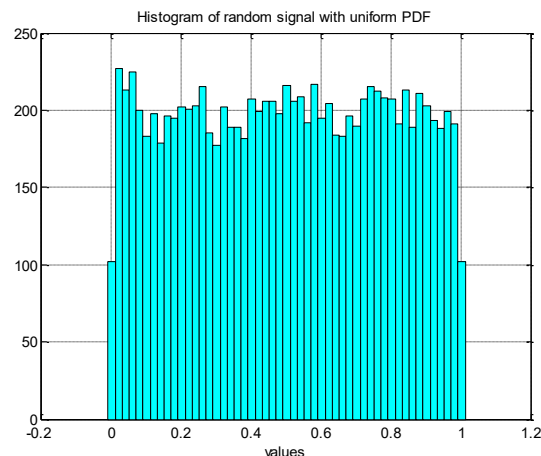


Figure 4.5 Histogramme d'un signal aléatoire de PDF uniforme

4.2 Processus aléatoire à temps continu (TC) et à temps discret (TD)

Un processus aléatoire est à temps continu (TC), si le temps $t \in \mathbf{R}$ (t réel)

Un processus aléatoire est à temps discret (TD), si le temps $t \in \mathbf{Z}$ (t entier)

En général, on s'intéresse à quatre types de processus aléatoires, selon la caractéristique du temps t et de la va $X(t) = X$ au temps t . On aura donc

1 **Etat (épreuve) continu et temps continu** : dans ce cas, $X(t)$ et t tous les deux sont continus. $X(t)$ est dit processus aléatoire continu (continuous random process) comme c'est montré dans la Figure 4.6

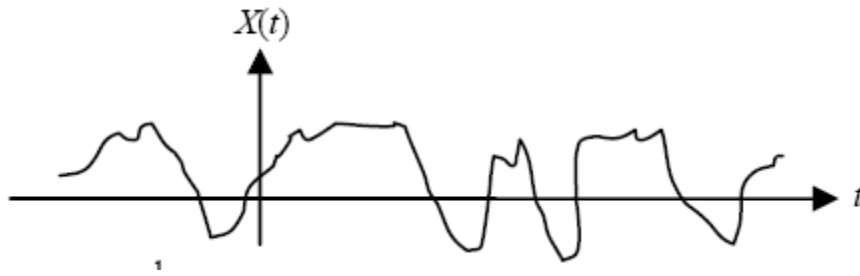


Figure 4.6 Processus Aléatoire à temps continu

2 Etat discret et temps continu. $X(t)$ assume un ensemble de valeurs discrètes, tandis que le temps t est continu. Un tel processus est considéré comme un processus discret (discrete random process). La Figure 4.7 illustre ce processus

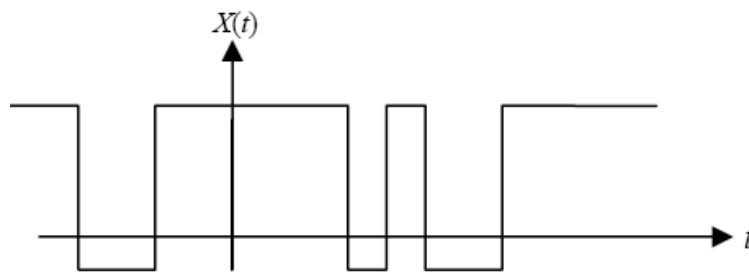


Figure 4.7 Processus Aléatoire Etat discret et temps discret

3 Etat continu et temps discret. $X(t)$ prends des valeurs continues, tandis que le temps est un ensemble de valeurs discrètes, comme c'est montré dans la Figure 4.8. Un tel processus est dit séquence aléatoire continue

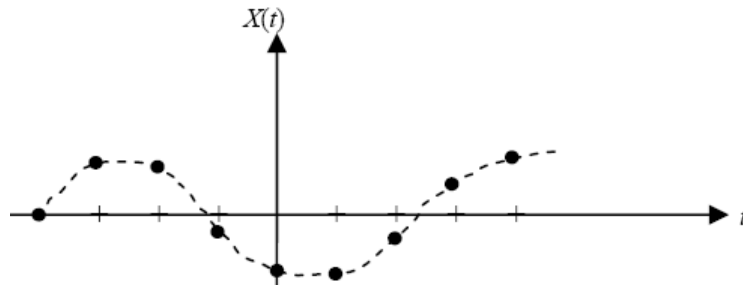


Figure 4.8 Processus Aléatoire Etat continu et temps discret

4 Etat discret et temps discret. $X(t)$ et t sont tous les deux considérés comme un ensemble de valeurs discrètes. Un tel processus est considéré comme une séquence aléatoire discrète. La Figure 4.9 illustre ce processus.

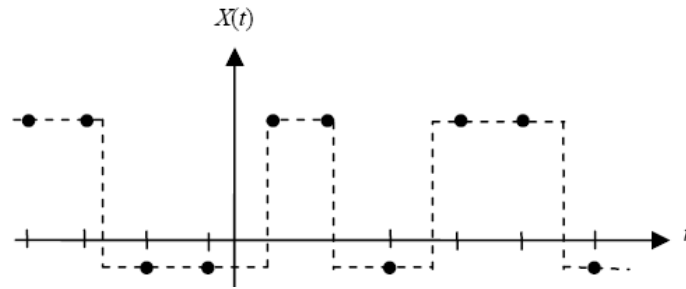


Figure 4.9 Processus Aléatoire Etat discret et temps discret

En fixant le temps t , le processus aléatoire $X(t)$ devient une va. Dans ce ca, les techniques qu'on utilise avec les variables aléatoires sont valables. Par voie de conséquence, on peut caractériser le processus aléatoire par la distribution d'ordre 1 (la fonction de répartition : cumulative density function) :

$$F_X(x; t) = P[X(t_0) \leq x], \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.3)$$

Et la fonction densité 1^{er} ordre :

$$f_X(x; t) = \frac{d}{dx} F_X(x; t) \quad (4.4)$$

pour toutes les valeurs de t .

Exemple 4.2: Processus aléatoire uniformément réparti

programme 4.2

```

%%%%%%%% Programme2.2%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% Processus aléatoire uniformément réparti
%%%%%%%%%%
fs=100; %sampling frequency in HZ
tiv=1/fs;%time interval between samples;
t=0:tiv:(2-tiv); % time interval set (200 values);
N=length(t);% number of data points
y=rand(N,1);%random signal data set
plot(t,y,'k');
axis([0 2 0 1.2]);
xlabel('seconds');
title('random signal with uniform PDF');

```

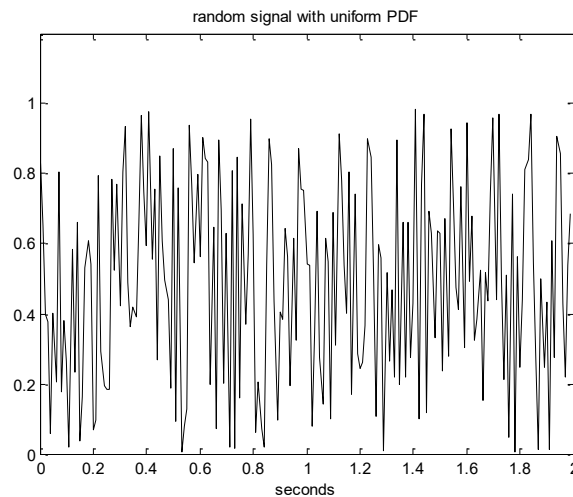


Figure 4.10 Signal aléatoire de pdf uniforme

La fonction distribution 2^{ème} ordre est la distribution conjointe de deux variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$ pour chaque t_1 et t_2 . Alors :

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) \leq x_1 \text{ et } X(t_2) \leq x_2], \quad -\infty < x_1 < +\infty, -\infty < x_2 < +\infty \quad (4.5)$$

Et la fonction densité 2^{ème} ordre est :

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (4.6)$$

Normalement, la description probabilistique complète d'un processus aléatoire quelconque, nécessite la connaissance des distributions du 1^{er} jusqu'au n^{ème} ordre, données par :

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n] \quad (4.7)$$

et la fonction densité du n^{ème} ordre est :

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (4.8)$$

ESPERANCES (EXPECTATIONS)

Dans plusieurs situations, uniquement les statistiques d'ordre 1 et 2 peuvent être nécessaires pour caractériser un processus aléatoire. Etant donné un processus aléatoire réel (a real random process) $X(t)$:

Moyenne $m_x(t)$

$$m_x(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x; t) dx \quad (4.9)$$

C'est la moyenne statistique, l'espérance mathématique ou encore moment d'ordre 1 de $X(t)$. Cette grandeur est déterministe et dépend de t . $E[X(t)]$ existe si l'intégrale (2.9) converge.

Fonction d'autocorrelation $R_{xx}(t_1, t_2)$

appelée aussi autocovariance si le processus est stationnaire et centré,

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

4.3 Stationnarité au sens large (stationary in the wide sense) des processus à TC et à TD

Notation : si le processus est à **TC**, $t, \tau, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, si le processus est à **TD**, $t, \tau, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$.

Lorsque la fonction d'autocorrelation $R_{xx}(t_1, t_2)$ ne dépend que de la différence $|t_1 - t_2|$, et la moyenne $m_x(t)$ est constante, on dit que le processus aléatoire est stationnaire au sens large (SSL), c'est-à-dire le processus vérifie les deux propriétés suivantes :

1. La moyenne du processus aléatoire est indépendante du temps (constante),

$$E[X(t)] = m_x(t) = m_x$$
2. La fonction d'autocorrelation ne dépend que de τ . Dans ce cas, $R_{xx}(t_1, t_2)$ est écrite en fonction d'un seul argument $\tau = t_1 - t_2$. Si $t_2 = t$ et $t_1 = t + \tau$,

$$R_{xx}(t + \tau, t) = R_{xx}(\tau)$$

4.4 Stationnarité au sens strict ou strictement stationnaire (strictly stationary or stationary in the strict sense)

Un processus aléatoire est strictement stationnaire si ses statistiques sont invariants par rapport au temps ou un décalage de temps (a time shift in the time origine). Un processus strictement stationnaire est également stationnaire au sens large (SSL). L'inverse n'est pas vrai.

Exemple 4.3

Vérifier si le processus aléatoire de l'exemple 4.1 est stationnaire au sens large.

Solution

Pour qu'un processus aléatoire soit stationnaire au sens large, il doit satisfaire deux conditions :

1. $E[X(t)] = \text{constante}$.
2. $R_{xx}(t + \tau) = R_{xx}(\tau)$.

Pour calculer la moyenne de $X(t)$, on utilise le concept de fonction d'une va

$$E[g(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) f_{\theta}(\theta) d\theta$$

Tel que, dans ce cas $g(\theta) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)$ et $f_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ dans l'intervalle de 0 à 2π

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A \cos(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

La fonction d'autocorrelation est :

$$\begin{aligned} E[X(t + \tau)X(t)] &= E\{A \cos[\omega(t + \tau) + \theta] A \cos(\omega t + \theta)\} \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\theta)] \end{aligned}$$

Où on a utilisé la relation trigonométrique :

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

Le second term est évalué à zéro. Donc, la fonction d'autocorrelation est :

$$R_{xx}(t + \tau, t) = \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau = R_{xx}(\tau)$$

Puisque la moyenne est constante et la fonction d'autocorrelation dépend uniquement de τ , $X(t)$ est un processus stationnaire au sens large (wide-sense stationary process).

Dans le cas de deux $X(t)$ et $Y(t)$, on dit qu'elles sont conjointement stationnaires (jointly wide-sense stationary) au sens large si chaque processus est stationnaire au sens large, et

$$R_{xy}(t + \tau, t) = E[X(t + \tau)Y(t)] = R_{xy}(\tau)$$

Tel que $R_{xy}(t_1, t_2)$ représente la fonction d'intercorrelation (cross-correlation function). On définit également la fonction **d'autocovariance** (the autocovariance function) $C_{xx}(t_1, t_2)$ et la fonction d'intercorrelation (the cross-covariance function) $C_{xy}(t_1, t_2)$ entre $X(t)$ et $Y(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} C_{xx}(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} \\ &= E[X(t_1)X(t_2)] - m_x(t_1)m_x(t_2) \end{aligned}$$

et

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_x(t_1)][Y(t_2) - m_y(t_2)]\}$$

Cas Particuliers

- Si le processus est stationnaire au sens large (SSL), l'autocovariance sera

$$C_{xx}(t_1, t_2) = C_{xx}(\tau) = E[X^0(t + \tau)X^0(t)] = E[X(t + \tau)X(t)] - m_x^2$$

avec

$$X^0(t + \tau) = [X(t + \tau) - m_x(t + \tau)]$$

si $\tau = 0$, l'autocovariance est la variance du signal $X(t)$. C'est également le moment d'ordre 2 de $X(t)$ en terme de moyenne. la racine carrée de la variance est l'**écart type** σ .

- Si le processus est centré $m_x = 0$, la fonction d'autocovariance se confond avec la fonction d'autocorrelation

$$C_{xx}(\tau) = E[X(t + \tau)X(t)] = R_{xx}(\tau)$$

On a aussi:

$$C_{xx}(\tau) = E[X^0(t)X^0(t - \tau)]$$

et

$$C_{xx}(-\tau) = E[X^0(t)X^0(t + \tau)] = C_{xx}(\tau), \text{ } C_{xx}(\tau) \text{ est paire}$$

Remarque

L'autocovariance d'un processus aléatoire strictement stationnaire $X(t)$ dépend uniquement de la différence $t_1 - t_2$. L'équation (de l'autocovariance) montre également, que si on connaît la moyenne et la fonction d'autocorrelation d'un processus aléatoire, on peut uniquement déterminer sa fonction d'autocovariance. La moyenne et la fonction d'autocorrelation sont alors suffisantes pour décrire les deux premiers moments du processus.

Cependant, deux points importants doivent être notés :

1. La moyenne et la fonction d'autocorrelation fournissent une description partielle seulement de la distribution du processus $X(t)$
2. Les conditions sur la moyenne et sur la fonction d'autocorrelation ne sont pas suffisantes pour garantir si le processus $X(t)$ est strictement stationnaire.

On se limite aux processus stationnaires 2nd ordre au sens large (SSL) (cas le plus courant).

La classe des processus aléatoires qui satisfont les deux conditions de stationnarité, sont appelés plutôt « stationnaires second ordre » ou encore « stationnaire au sens large ». un processus stationnaire n'est pas nécessairement strictement stationnaire, parce que les deux conditions n'impliquent pas l'invariance par rapport au temps de la distribution conjointe (de dimension k)

Processus Aléatoire Complexe

Si $Z(t)$ est un processus aléatoire complexe (complexe random process) tel que $Z(t) = X(t) + jY(t)$

Les fonctions d'autocorrelation et d'autocovariance sont

$$R_{zz}(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z^*(t_2)]$$

et

$$C_{zz}(t_1, t_2) = E[\{Z(t_1) - m_z(t_1)\}\{Z(t_2) - m_z(t_2)\}^*]$$

où * dénote le complexe conjugué et $m_z(t)$ la moyenne de $Z(t)$.

Les fonctions d'intercorrelation et d'intercovariance (the cross-correlation and the cross-covariance functions) entre le processus aléatoire complexe $Z(t)$ et un autre processus aléatoire complexe $W(t)$, $W(t) = U(t) + jV(t)$, sont

$$R_{zw}(t_1, t_2) = E[Z(t_1)W^*(t_2)]$$

et

$$C_{zw}(t_1, t_2) = E[\{Z(t_1) - m_z(t_1)\}\{W(t_2) - m_w(t_2)\}^*]$$

Exemple 4.3

Soit $I(t)$ et $Q(t)$ deux processus aléatoires tel que

$$I(t) = X \cos \omega t + Y \sin \omega t \text{ et } Q(t) = Y \cos \omega t - X \sin \omega t$$

où X et Y sont deux variables aléatoires noncorrélées et de moyenne zéro. Les valeurs des moyennes quadratiques de X et Y sont $E[X^2] = E[Y^2] = \sigma^2$. Donner la fonction d'intercorrelation R_{iq}

Solution

$$\begin{aligned} R_{iq}(t + \tau, t) &= E[I(t + \tau)Q(t)] \\ &= E[\{X \cos(\omega t + \omega \tau) + Y \sin(\omega t + \omega \tau)\} \{Y \cos \omega t - X \sin \omega t\}] \\ &= E[XY] \cos(\omega t + \omega \tau) \cos \omega t - E[X^2] \cos(\omega t + \omega \tau) \sin \omega t + E[Y^2] \sin(\omega t + \omega \tau) \cos \omega t \\ &\quad - E[XY] \sin(\omega t + \omega \tau) \sin \omega t \end{aligned}$$

En utilisant les relations trigonométriques et du moment que X et Y sont noncorrélées et de moyennes zéro ($E[XY] = E[X] = E[Y] = 0$), on trouve :

$$R_{iq}(t + \tau, t) = -\sigma^2 \sin \omega \tau$$

Exemple 4.3'

Soit $N(t)$ un processus aléatoire défini comme suit :

$$N(t) = U \cdot \exp[-|t|] + V$$

Où U et V sont deux variables aléatoires indépendantes et de moyenne nulle $E[U] = E[V] = 0$

1. Déterminer $E[N(t)]$; calculer $E[N(0)]$ et $E[N(2)]$
2. Calculer $E[N^2(0)]$ et $E[N^2(2)]$
3. Déterminer la fonction d'autocorrelation de ce processus
4. Le processus est-il stationnaire
5. Calculer le coefficient de corrélation entre $N(0)$ et $N(2)$

Solution

$$E[N(t)] = E[U]e^{-|t|} + E[V]$$

Si $E[U] = E[V] = 0$ alors $E[N(t)] = 0$

$$E[N(0)] = E[U] + E[V]$$

$$E[N^2(0)] = E[(U + V)^2] = E[U^2] + E[V^2] + E[U]E[V]$$

Si de plus $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$ alors : $E[N^2(0)] = 2$

$$E[N^2(2)] = E[(Ue^{-2} + V)^2] = E[U^2]e^{-4} + E[V^2] + E[U]E[V]e^{-2}$$

Si de plus $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$ alors $E[N^2(2)] = 1 + e^{-4}$

La fonction d'autocorrelation

$$R_{NN}(t_1, t_2) = E[N(t_1) \cdot N(t_2)] = e^{-|t_1|} e^{-|t_2|} E[U^2] + E[U]E[V](e^{-|t_1|} + e^{-|t_2|}) + E[V^2]$$

Si de plus $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$ alors : $R_{NN}(t_1, t_2) = e^{-|t_1|} e^{-|t_2|} + 1$

Du moment que la fonction d'autocorrelation $R_{NN}(t_1, t_2)$ dépend du temps, le processus n'est pas stationnaire.

Le coefficient de corrélation :

$$\rho_N(0,2) = \frac{E[(N(0) - E(N(0))) \cdot (N(2) - E(N(2)))]}{\sigma_N(0)\sigma_N(2)} = \frac{E[(U+V)(Ue^{-2} + V)]}{\sigma_N(0)\sigma_N(2)}$$

$$\rho_N(0,2) = \frac{E[U^2]e^{-2} + E[U]E[V](1 + e^{-2}) + E[V^2]}{\sigma_N(0)\sigma_N(2)}$$

Si de plus $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$ $E[U] = E[V] = 0$ alors

$$\rho_N(0,2) = \frac{1 + e^{-2}}{\sqrt{2(1 + e^{-4})}}$$

Propriétés de La Fonction d'autocorrelation (FAC)

Par conversion de notation, nous rappelons la fonction d'autocorrelation d'un processus aléatoire stationnaire $X(t)$:

$$R_{xx}(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)] \quad \text{for all } t$$

Cette FAC a plusieurs propriétés :

La moyenne de la valeur quadratique du processus peut être obtenue à partir de $R_{xx}(\tau)$, en posant $\tau = 0$,

$$R_{xx}(0) = E[X^2(t)]$$

La fonction d'autocorrelation est une fonction paire (an even function):

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

On peut également définir la fonction d'autocorrelation $R_{xx}(\tau)$, comme suit :

$$R_{xx}(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)]$$

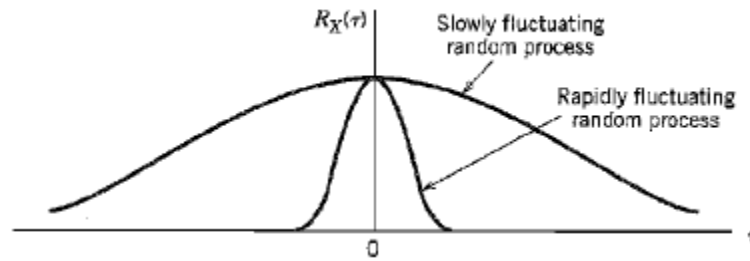


Figure 4.11 Illustration des fonctions d'autocorrelation des processus aléatoires lentement et rapidement fluctuants

La fonction d'autocorrelation est max à l'origine ($\tau = 0$), c'est-à-dire :

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

Pour démontrer cette propriété, considérer la quantité non négative suivante :

$$\begin{aligned} E[(X(t+\tau) \pm X(t))^2] &\geq 0 \\ \Rightarrow E[X^2(t+\tau)] \pm 2E[X(t+\tau)X(t)] + E[X^2(t)] &\geq 0 \\ \Rightarrow 2R_{xx}(0) \pm 2R_{xx}(\tau) &\geq 0 \end{aligned}$$

On peut écrire

$$-R_{xx}(0) \leq R_{xx}(\tau) \leq R_{xx}(0)$$

C'est-à-dire

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

$$R_{xx}(t_2, t_1) = R_{xx}^*(t_1, t_2)$$

Si $X(t)$ est réel, alors la fonction d'autocorrelation est symétrique dans le plan (t_1, t_2)

$$R_{xx}(t_2, t_1) = R_{xx}(t_1, t_2)$$

La valeur de la moyenne quadratique du processus aléatoire $X(t)$ est toujours positive, alors :

$$R_{xx}(t_1, t_1) = E[X(t_1)X^*(t_1)] = E[|X(t)|^2] \geq 0$$

Si $X(t)$ est réel, la valeur de la moyenne quadratique $E[X^2(t)]$ est toujours non négative .

$$|R_{xx}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{R_{xx}(t_1, t_1)R_{xx}(t_2, t_2)}$$

C'est l'inégalité de Schwartz. Elle peut être écrite comme suit :

$$|R_{xx}(t_1, t_2)|^2 \leq E[|X(t_1)|^2]E[|X(t_2)|^2]$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_i a_j^* R_{xx}(t_i, t_j) \geq 0$$

Pour n'importe quelle suite de valeurs a_0, a_2, \dots, a_{N-1} et n'importe quelle suite des instants t_0, t_2, \dots, t_{n-1} . Alors, l'autocorrelation est une fonction définie nonégative. On peut écrire la propriété de positivité comme suit :

$A^T \mathbf{R} \mathbf{A} \geq 0$ ($A^H \mathbf{R} \mathbf{A} \geq 0$ dans le cas complexe), les exposants T et H indiquent respectivement la transposition et la transposition-conjugaison.

Exemple pour $N=3$:

$$A^T \mathbf{R} \mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ a_2] \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

Dans le cas complexe,

$$A^H \mathbf{R} \mathbf{A} = [a_0^* \ a_1^* \ a_2^*] \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) \\ R_{xx}(-1) & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(-2) & R_{xx}(-1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

En raison de la stationnarité du processus aléatoire, la matrice \mathbf{R} est telle que les parallèles à la diagonale principale sont constitués de termes égaux. Cette forme de matrice porte le nom de matrice de **Toeplitz**.

Propriétés de La Fonction d'intercorrelation (FAC)

Considérer les deux processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$.

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}^*(t_2, t_1)$$

Et d'une autre part

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E [X(t_1)Y(t_2)]$$

$$R_{yx}(t_1, t_2) = E [Y(t_1)X(t_2)]$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\mathbf{R}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} R_{xx}(t_1, t_2) & R_{xy}(t_1, t_2) \\ R_{yx}(t_1, t_2) & R_{yy}(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

Cette matrice est appelée matrice de corrélation.

Si les deux processus $X(t)$ et $Y(t)$ sont stationnaires chacun, et conjointement stationnaires, alors la matrice de corrélation peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{xx}(\tau) & R_{xy}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) & R_{yy}(\tau) \end{bmatrix}$$

où $\tau = t_1 - t_2$

Si $X(t)$ et $Y(t)$ sont des processus réels :

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1)$$

En général, $R_{xy}(t_1, t_2)$ et $R_{yx}(t_2, t_1)$ sont différentes

$$\begin{aligned} |R_{xy}(t_1, t_2)| &= E[X(t_1)]E[Y(t_2)] \\ &\leq \sqrt{R_{xx}(t_1, t_1)R_{yy}(t_2, t_2)} = \sqrt{E[X^2(t_1)]E[Y^2(t_2)]} \end{aligned}$$

$X(t)$ et $Y(t)$ sont stationnaires au sens large (SSL) (wide sense stationary),

La fonction d'autocorrelation est une fonction paire de τ :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

$$R_{xx}(0) = E[|X|^2(t)]$$

Du moment que $X(t)$ est réel :

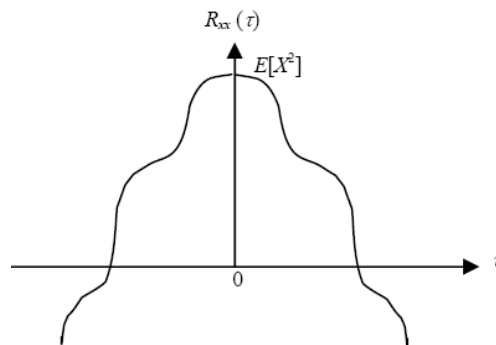
$$R_{xx}(0) = E[X^2(t)] = E[X^2(t)] - m_x^2 + m_x^2 = \sigma_x^2 + m_x^2 \geq 0$$

Rappelons que nous avons le max de $R_{xx}(\tau)$ à $\tau = 0$. Plus on s'éloigne de l'origine, plus $R_{xx}(\tau)$ décroît rapidement. Si $\tau \rightarrow \infty$, les deux observations peuvent être incorrélées. Dans ce cas, la fonction d'autocovariance tend vers 0.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_{xx}(\tau) = E[\{X(t+\tau) - m_x\}\{X(t) - m_x\}] = R_{xx}(\tau) - m_x^2 = 0$$

Ou encore

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = |m_x|^2$$



Exemple d'une fonction d'autocorrelation

On obtient les mêmes propriétés si $X(t), Y(t)$ sont conjointement stationnaires au sens large (jointly stationary in the wide sense),

$$R_{xy}^*(\tau) = R_{xy}(-\tau)$$

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0)R_{yy}(0)$$

$$R_{xy}(0) = R_{xy}^*(0)$$

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \frac{R_{xx}(0) + R_{yy}(0)}{2}$$

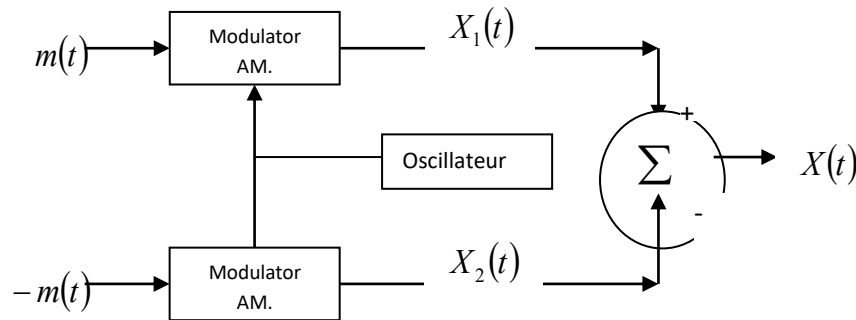
Exemple 4.4

Considérer une paire de processus modulés en quadrature $X_1(t), X_2(t)$ qui sont liés au processus stationnaire $X(t)$:

$$X_1(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

$$X_2(t) = X(t)\sin(2\pi f_c t + \Theta)$$

L'exemple réel de ce processus est la génération de la double bande latérale en modulation AM (DSB-SC), ou on rappelle le schéma pour plus de clarté dans l'exposé :



ou f_c est la fréquence porteuse, et Θ est une variable aléatoire (va) uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Cependant, Θ est indépendante de $X(t)$. l'intercorrelation de $X_1(t), X_2(t)$ est

$$\begin{aligned} R_{x_1 x_2}(\tau) &= R_{12}(\tau) = E[X_1(t)X_2(t - \tau)] \\ &= E[X(t)X(t - \tau)\cos(2\pi f_c t + \Theta)\sin(2\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + \Theta)] \\ &= \frac{1}{2}E[X(t)X(t - \tau)\sin(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + 2\Theta) - X(t)X(t - \tau)\sin(2\pi f_c \tau)] \\ &= \frac{1}{2}E[X(t)X(t - \tau)](E[\sin(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + 2\Theta)] - E[\sin(2\pi f_c \tau)]) \\ &= -\frac{1}{2}R_{xx}(\tau)E[\sin(2\pi f_c \tau)] \\ &\left(E[\sin(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + 2\Theta)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + 2\theta) d\theta = 0 \right) \end{aligned}$$

Notons qu'à $\tau = 0$, $R_{12}(\tau) = -\frac{1}{2}R_{xx}(\tau)E[\sin(0)] = E[X_1(t)X_2(t)] = 0$

Cela montre les va obtenues par les observations simultanées $X_1(t), X_2(t)$ sont orthogonales.

4.5 Quelques processus aléatoires

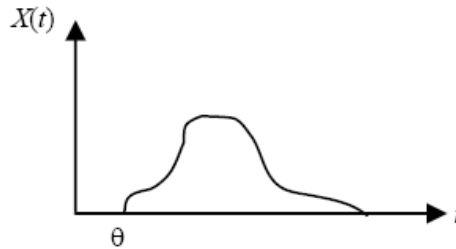
Dans ce paragraphe, nous allons étudier certains processus aléatoires qui peuvent caractériser quelques applications.

A Single Pulse of Known Shape but Random Amplitude and Arrival Time

Dans les applications du Radar et du Sonar, le signal reçu (a return signal) peut être caractérisé comme un processus aléatoire « une impulsion », mais avec une amplitude et un temps d'arrivée aléatoires. L'impulsion peut être exprimée par :

$$X(t) = A S(t - \Theta)$$

où A et Θ sont des variables aléatoires statistiquement indépendantes, et $s(t)$ est une fonction déterministe. Un exemple de cette fonction est représenté dans la Figure



La valeur moyenne de processus aléatoire particulier est donnée par:

$$E[X(t)] = E[A S(t - \Theta)]$$

Du moment que A et Θ sont statistiquement indépendants, on aura :

$$E[X(t)] = E[A]E[S(t - \Theta)] = E[A] \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta$ est tout simplement la convolution de l'impulsion $s(t)$ avec la fonction densité de Θ . Alors :

$$E[X(t)] = E[A] s(t) * f_{\Theta}(\theta)$$

Par analogie,

La fonction d'autocorrelation est donnée par :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[A^2] \int_{-\infty}^{+\infty} s(t_1 - \theta) s(t_2 - \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta$$

Si le temps d'arrivée est connu avec une certaine valeur θ_0 , alors les fonctions de moyenne et d'autocorrelation de $X(t)$ deviennent :

$$E[X(t)] = E[A] s(t - \theta_0)$$

et

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[A^2] s(t_1 - \theta_0) s(t_2 - \theta_0)$$

Cas particulier:

Le temps d'arrivée peut être uniformément distribué sur l'intervalle $[0, T]$. Les fonctions de moyenne et d'autocorrelation:

$$E[X(t)] = E[A]E[S(t - \Theta)] = \frac{E[A]}{T} \int_0^T s(t - \theta) d\theta$$

et

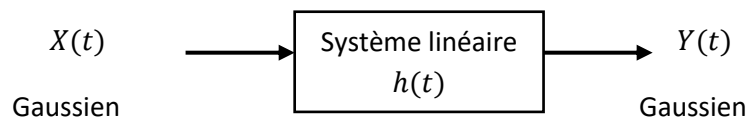
$$R_{xx}(t_1, t_2) = \frac{E[A]}{T} \int_0^T s(t_1 - \theta) s(t_2 - \theta) d\theta$$

Processus Gaussien

Le processus aléatoire $X(t)$ est gaussien si les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement gaussien pour toutes les valeurs possibles de n et t_1, t_2, \dots, t_n . Du moment que les variables aléatoires gaussiennes multiples dépendent uniquement du vecteur moyenne et de la matrice de covariance de n valeurs aléatoires, on observe que $X(t)$ stationnaire au sens large (SSL). Si $X(t)$ est un processus aléatoire gaussien appliqué à un système linéaire invariant avec une réponse impulsionnelle $h(t)$, comme c'est montré dans la Figure 2.4, alors le processus aléatoire :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

est aussi gaussien.



Exemple 4.5

Soit $X(t)$ un processus aléatoire SSL, gaussien de moyenne zéro, une entrée d'un détecteur quadratique (a square law detector) un système nonlinéaire sans mémoire.

1. Vérifier que la sortie n'est plus gaussienne.
2. Déterminer la fonction d'autocorrelation $R_{yy}(\tau)$, de la sortie ainsi que la variance.

Solution

La fonction densité de l'input est :

$$f_X(x; t) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

En utilisant le théorème fondamental :

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} + \Lambda + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|} + \Lambda$$

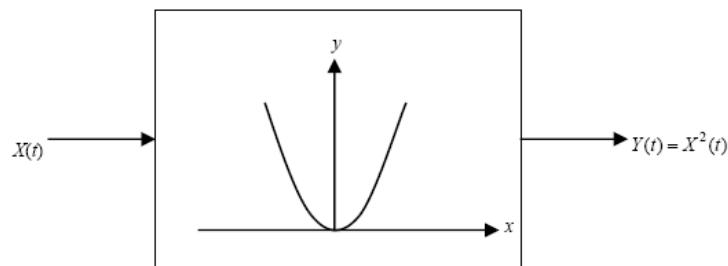
$Y = X^2 \Rightarrow X = \pm\sqrt{Y}$, on a donc deux racines: $x_1 = +\sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$

$$g'(x) = 2x \Rightarrow g'(x_1) = 2(\sqrt{y}), \quad g'(x_2) = -2(\sqrt{y})$$

Alors :

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y; t) = f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2\sigma^2}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



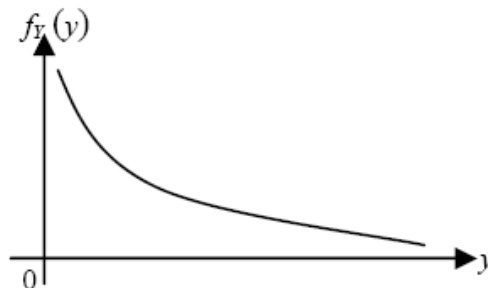
Détecteur quadratique

On observe que la sortie du système nonlinéaire n'est plus gaussienne.

La fonction d'autocorrelation de la sortie $Y(t) = X^2(t)$, est donnée par :

$$R_{yy}(t + \tau, t) = E[Y(t + \tau)Y(t)] = E[X^2(t + \tau)X^2(t)] = E[X(t + \tau)X(t + \tau)X(t)X(t)]$$

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(0) + 2R_{xx}(\tau)$$



La fonction densité de la sortie

détail de calcul:

$$\begin{aligned}
 E[X(t+\tau)X(t+\tau)X(t)X(t)] &= E[X(t+\tau)X(t+\tau)]E[X(t)X(t)] + E[X(t+\tau)X(t)]E[X(t+\tau)X(t)] \\
 &\quad + E[X(t+\tau)X(t)]E[X(t+\tau)X(t)] \\
 &= R_{xx}^2(0) + 2R_{xx}^2(\tau) \\
 R_{yy}(\tau) &= R_{xx}^2(0) + 2R_{xx}^2(\tau) \\
 E[Y(t)] &= E[X^2(t)] = R_{xx}(0) = \sigma_{xx}^2
 \end{aligned}$$

Alors, la valeur quadratique moyenne de $Y(t)$ est

$$E[Y^2(t)] = R_{yy}(0) = 3\{E[X^2(t)]\}^2 = 3[R_{xx}(0)]^2$$

Mais $E[Y(t)] = E[X^2(t)] = R_{xx}(0) = \sigma^2$. Donc, la variance de $Y(t)$ est

$$\sigma_y^2 = E[Y^2(t)] - \{E[Y(t)]\}^2 = 2[R_{xx}(0)]^2 = 2\sigma^4$$

4.6 SYSTEMES LINEAIRES INVARIANT A ENTREE STOCHASTIQUE

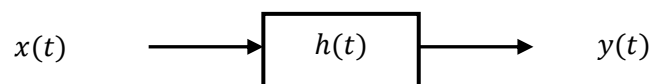
Un système linéaire et invariant par rapport au temps est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$, où bien sa fonction de transfert $H(f)$ qui est la transformée de Fourier de $h(t)$. Alors,

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

et

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df$$

si $x(t)$, le signal d'entrée appliqué au système linéaire et invariant par rapport au temps, est déterministe comme c'est illustré dans la figure ci-dessous, le signal de sortie est la convolution de $x(t)$ et $h(t)$:



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau) d\tau$$

$y(t)$ est une fonction échantillon du processus aléatoire $Y(t)$ qui correspond à la fonction échantillon du processus aléatoire d'entrée $X(t)$. L'expression de la sortie dans le domaine fréquentiel est alors :

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

où $X(f)$ et $Y(f)$ sont les transformées de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$ respectivement. Le système est réalisable pourvu que la réponse impulsionnelle soit causal ; alors :

$h(t) = 0$ pour $t < 0$. Dans ce cas, l'intégrale de convolution devient

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

4.7 SIGNAUX STOCHASTIQUES

Considérer le système linéaire invariant par rapport au temps de la Figure précédente.

$$\begin{aligned} Y(t) &= h(t) * X(t) = X(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-\alpha)h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

LA MOYENNE

La valeur moyenne du processus de sortie est donnée par

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t-\alpha)] h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} m_x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$

où $m_x(t)$ est la moyenne du processus $X(t)$. Si $X(t)$ est stationnaire au sens large :

$$m_x(t-\alpha) = m_x(t) = \text{constante}$$

Donc, la moyenne $m_y(t)$ du processus $Y(t)$ est

$$m_y(t) = E[Y(t)] = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) d\alpha$$

On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) d\alpha = H(0)$

Alors :

$$m_y(t) = E[Y(t)] = m_x H(0)$$

La Valeur Quadratique Moyenne

$$E[Y^2(t)] = E \left[\iint_{-\infty}^{\infty} X(t-t_1)X(t-t_2)h(t_1)h(t_2)dt_1dt_2 \right]$$

En simplifiant cette relation, on aura :

$$E[Y^2(t)] = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t-t_1, t-t_2)h(t_1)h(t_2)dt_1dt_2$$

$$E[Y^2(t)] = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t_1, t_2)h(t-t_1)h(t-t_2)dt_1dt_2$$

En assumant que $X(t)$ est stationnaire au sens large et après un changement de variable

$\alpha = t - t_1$ $\beta = t - t_2$, donc :

$$E[Y^2(t)] = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\alpha - \beta)h(\alpha)h(\beta)d\alpha d\beta$$

Qui est indépendante du temps

La Fonction d'intercorrelation Entre l'Input et l'Output

On considère que le processus input $X(t)$ est stationnaire au sens large. La fonction d'intercorrelation entre l'input et l'output est :

$$R_{yx}(t + \tau, t) = E[Y(t + \tau)X^*(t)]$$

En utilisant la relation $Y(t) = X(t) * h(t)$ et après un changement de variables, la fonction d'intercorrelation peut être écrite comme suit :

$$R_{yx}(t + \tau, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha = R_{xx}(\tau) * h(\tau)$$

On constate que ce résultat ne dépend pas de t , et donc $R_{yx}(t + \tau) = R_{yx}(\tau)$. on peut également montrer que :

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(-\tau)$$

On calcule directement l'inter densité spectrale de puissance $S_{yx}(f)$:

$$S_{yx}(f) = S_{xx}(f) \cdot H(f)$$

et

$$S_{xy}(f) = S_{xx}(f) \cdot H^*(f)$$

La Fonction d'Autocorrelation et le Spectre de l'Output

$$R_{yy}(t + \tau, t) = E[Y(t + \tau)Y(t)]$$

Nous avons

$$Y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t + \tau - \alpha)h(\alpha) d\alpha$$

et

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t - \beta)h(\beta) d\beta$$

Par substitution de $Y(t + \tau)$ et $Y(t)$ dans $R_{yy}(t + \tau, t)$ et par changement de variables : $\alpha = -\beta$, on trouve :

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= E \left[\iint_{-\infty}^{+\infty} X(t + \tau - \alpha)h(\alpha)X(t - \beta)h(\beta)d\alpha d\beta \right] \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} E[X(t + \tau - \alpha)X(t - \beta)]h(\alpha)h(\beta) d\alpha d\beta. \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau - \alpha + \beta)h(\alpha)h(\beta)d\alpha d\beta = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \end{aligned}$$

$$R_{yy}(\tau) = R_{yx}(\tau) * h(-\tau) = R_{xy}(\tau) * h(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

En calculant la transformée de Fourier de $R_{yy}(\tau)$, on trouve la densité spectrale de l'output $S_{yy}(f)$

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) \cdot |H(f)|^2$$

Exemple 4.6

Un bruit blans avec une fonction d'autocorrelation $R_{xx}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ appliqué à un filtre avec une réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \alpha > 0$$

Dterminer la fonction d'autocorrelation $R_{yy}(\tau)$ du processus de l'output ?

Solution

Le problème peut être résolu par deux méthodes. On peut directement calculer l'intégral de convolution $R_{yy}(\tau)$ ou la densité spectrale de puissance $S_{yy}(f)$ en fonction de $S_{xx}(f)$, puis on calcule la Transformée de Fourier inverse de $S_{yy}(f)$.

Méthode 1

Pour $\tau < 0$, nous avons :

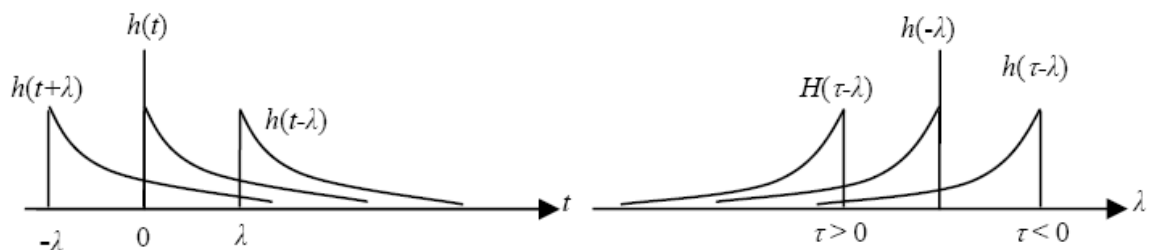
$$h(\tau) * h(-\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \alpha e^{-\alpha(\tau-\lambda)} \alpha e^{+\alpha\lambda} d\lambda = \alpha^2 e^{-\alpha\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{2\alpha\lambda} d\lambda = \frac{\alpha}{2} e^{\alpha\tau}$$

Pour $\tau > 0$, nous avons :

$$h(\tau) * h(-\tau) = \int_{-\infty}^0 \alpha e^{-\alpha(\tau-\lambda)} \alpha e^{\alpha\lambda} d\lambda = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\tau}$$

alors

$$g(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} e^{\alpha\tau}, & \tau \leq 0 \\ \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\tau}, & \tau \geq 0 \end{cases}$$



La réponse impulsionnelle avec τ comme paramètre

Donc

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * g(\tau) = \begin{cases} \frac{N_0\alpha}{4} e^{\alpha\tau}, & \tau \leq 0 \\ \frac{N_0\alpha}{4} e^{-\alpha\tau}, & \tau \geq 0 \end{cases}$$

$$R_{yy}(\tau) = \frac{N_0\alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|}$$

Méthode 2

A partir de la relation de la dsp de l'output, $S_{yy}(f)$, on doit d'abord calculer la TF $H(f)$ de la réponse impulsionnelle $h(t)$. Alors :

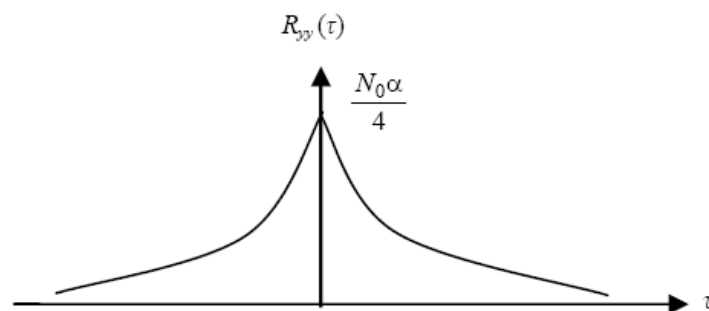
$$H(f) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-(j2\pi f + \alpha)t} dt = \frac{\alpha}{j2\pi f + \alpha}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{\alpha^2}{4\pi^2 f^2 + \alpha^2}$$

Tandis que la densité spectrale de l'output est :

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0\alpha}{4} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2}$$

où $\omega = 2\pi f$. En calculant la transformée de Fourier inverse de $S_{yy}(f)$, on obtient la fonction d'autocorrelation $R_{yy}(\tau)$



La fonction d'autocorrelation de $Y(t)$

$$R_{yy}(\tau) = \frac{N_0\alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|}$$

Bruit blanc

Un bruit blanc $b(t)$ est un processus aléatoire stationnaire (SSL) à temps continu (TC) ou à temps discret (TD), généralement centré, dont la DSP $S_{bb}(f)$ est constante sur tout l'axe des fréquences (le nom « blanc », fait référence donc à la lumière blanche dont la puissance est répartie uniformément sur l'ensemble des fréquences optiques). Du fait de la définition de la DSP, un bruit blanc est donc caractérisé par sa fonction d'autocorrelation $R_{bb}(\tau)$ impulsionnelle.

Bruit blanc de variance σ^2

La fonction d'autocorrelation

$$\text{à TC : } R_{bb}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad \text{à TD : } R_{bb}(k) = \sigma^2 \delta_{k,0}$$

la DSP

$$\text{à TC : } S_{bb}(f) = TF[R_{bb}(\tau)] = \sigma^2 \quad \text{à TD : } S_{bb}(f) = TF[R_{bb}(k)] = \sigma^2$$

Autre Définitions :

Sens faible : le bruit blanc est une suite de VA noncorrelées (réalisations noncorrelées)

Sens fort : le bruit blanc est une suite de VA indépendantes (réalisations indépendantes)

Le terme « blancheur » vient de l'analogie avec la lumière blanche et traduit le fait que toutes les fréquences sont présentes dans un bruit blanc avec la même puissance.

Un bruit blanc à TD est réalisable en pratique alors qu'un bruit blanc à TC ne l'est pas car sa puissance (qui est égale à sa fonction d'autocorrelation en 0) est infinie (Dirac).

Loi de distribution : un processus blanc peut avoir une loi de distribution quelconque : normale, uniforme, etc. ...

Signal ergodique \Leftrightarrow Signal stationnaire + (moyenne d'ensemble = moyenne temporelle)

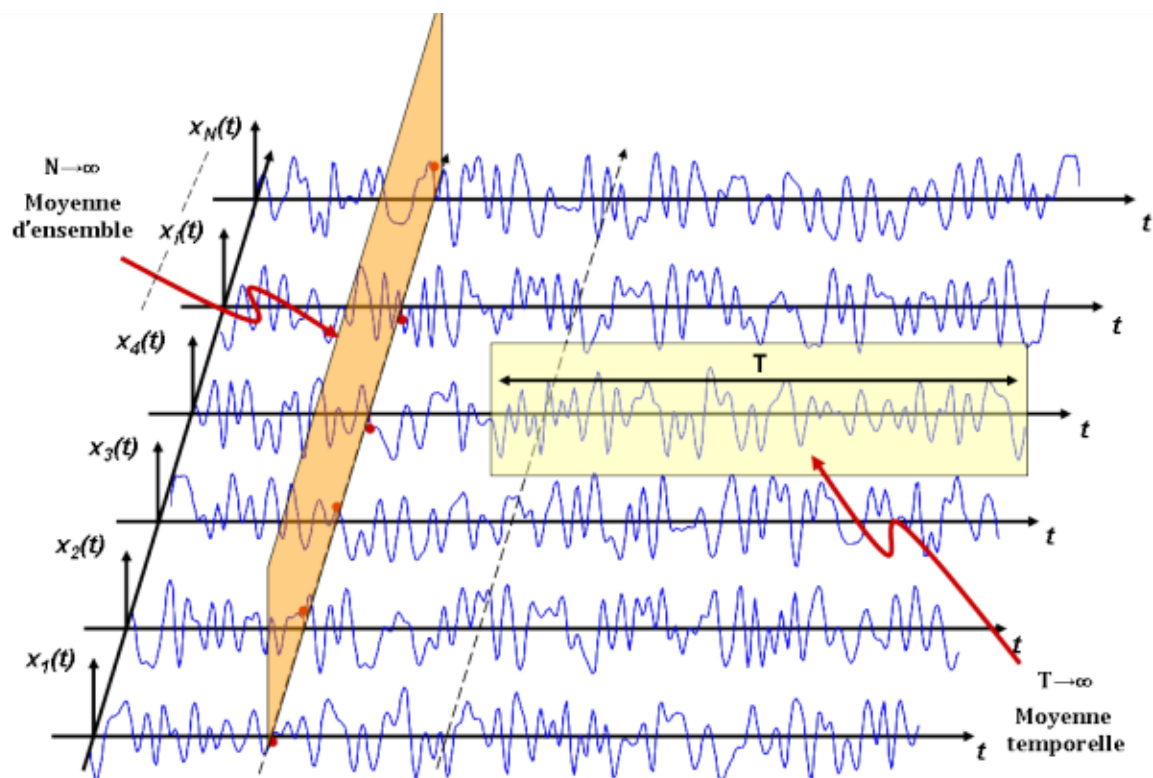
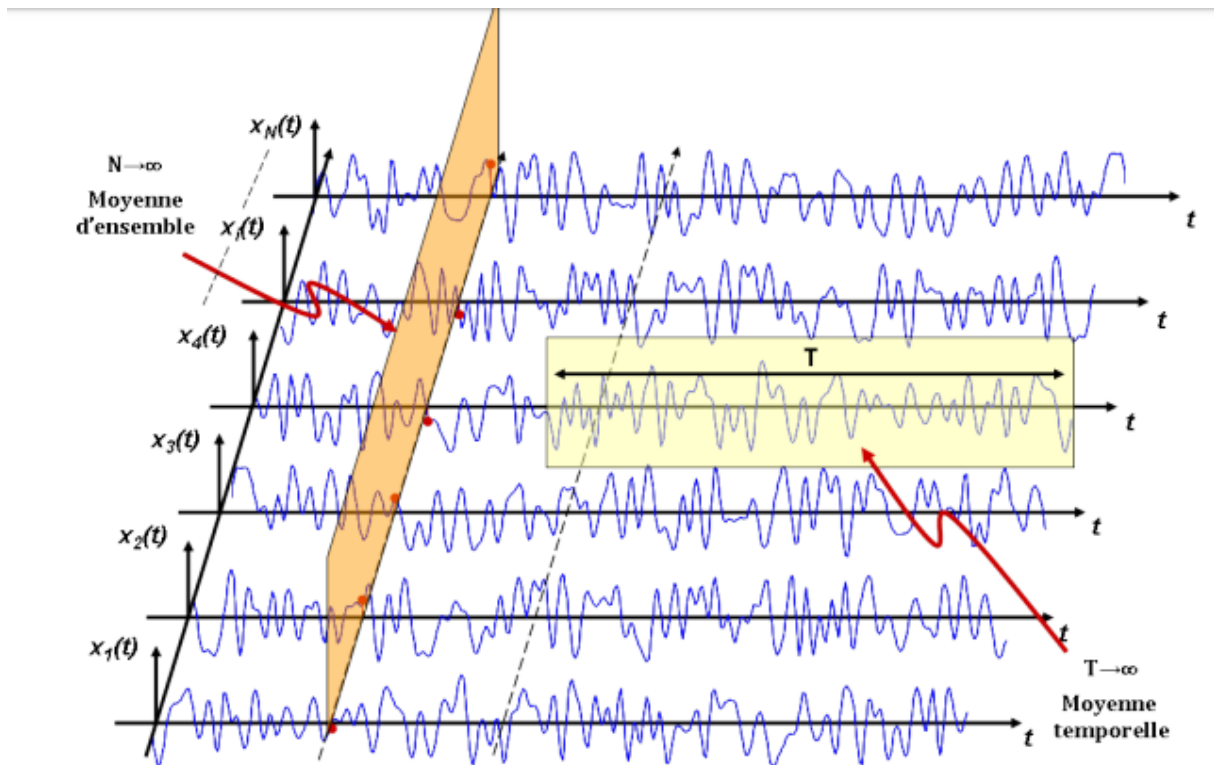


Figure 1-2 : Moyenne d'ensemble et moyenne temporelle



Moyenne d'ensemble et moyenne temporelle

4.8 Ergodicité

Un processus aléatoire $X(t)$ peut être vu comme une multitude de trajectoires correspondant à autant de réalisations de l'expérience à l'identité. Cependant, dans un grand nombre de cas pratiques, une seule réalisation du processus est accessible à la mesure

Un processus aléatoire stationnaire $X(t)$ est ergodique si tous ses statistiques peuvent être déterminés à partir d'une seule réalisation ; c'est-à-dire si sa moyenne et sa fonction d'autocorrelation peuvent être obtenues en effectuant une moyenne temporelle sur une seule trajectoire (une seule réalisation) de durée infinie. Précisément, on parle d'ergodicité au sens de la moyenne et au sens de la fonction d'autocorrelation.

Ergodicité au sens de la moyenne

Un processus aléatoire $X(t)$ est ergodique au sens de la moyenne si :

$$E[X(t)] = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt$$

La condition nécessaire et suffisante sous laquelle le processus $X(t)$ est érgodique au sens de la moyenne, est :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_{xx}(\tau) d\tau = m_x^2$$

Où $m_x = E[X(t)]$ est la moyenne de $X(t)$

Ergodicité au sens de la fonction d'autocorrelation

Un processus aléatoire $X(t)$ est ergodique au sens de la fonction d'autocorrelation si

$$R_{xx}(\tau) = \langle x(t + \tau)x(t) \rangle$$

Tel que $\langle x(t + \tau)x(t) \rangle$ dénote la moyenne temporelle de la fonction d'autocorrelation de la réalisation $x(t)$ et est définie par :

$$\langle x(t + \tau)x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'ergodicité au sens de la fonction d'autocorrelation est que les variables aléatoires $X(t + \tau)X(t)$ et $X(t + \tau + \alpha)X(t + \alpha)$ deviennent noncorrelées pour chaque τ quand α tend vers l'infini.

Exemple :

Considérer un processus aléatoire $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta)$, où A et f_c sont constants, et Θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Solution

On a déjà calculé pour ce processus :

$$E[X(t)] = 0, \text{ et } R_{xx}(\tau) = \left(\frac{A^2}{2}\right) \cos(2\pi f_c \tau)$$

Soit la réalisation du processus $x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta)$

$$\text{La moyenne temporelle } \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \cos(2\pi f_c t + \theta) dt = 0$$

$$\begin{aligned} \text{et } \langle x(t + \tau)x(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^T \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \theta) \cos(2\pi f_c t + \theta) dt \\ &= \left(\frac{A^2}{2}\right) \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned}$$

Alors, le processus est ergodique au sens de la moyenne et au sens de la fonction d'autocorrelation.

Ergodicité de La Fonction de Répartition 1^{er} Ordre

Soit $X(t)$ un processus aléatoire stationnaire. On définit le processus aléatoire $Y(t)$ comme suit :

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \leq x_t \\ 0, & X(t) > x_t \end{cases}$$

On dit que le processus aléatoire $X(t)$ est ergodique au sens de la distribution 1^{er} ordre si :

$$F_X(x; t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt$$

Where $F_X(x; t) = P[X(t) \leq x(t)]$ et $y(t)$ est une fonction échantillon du processus $Y(t)$. La condition nécessaire et suffisante sous laquelle le processus est ergodique au sens de la distribution 1^{er} ordre est que $X(t + \tau)$ et $X(t)$ deviennent statistiquement indépendants lorsque τ tend vers l'infini.

Ergodicité au Sens de La Densité Spectrale de Puissance

Le processus stationnaire au sens large (SSL) $X(t)$ est ergodique au sens de la densité spectrale de puissance si, pour n'importe quelle fonction échantillon $x(t)$,

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2$$

Sauf pour l'ensemble de fonctions échantillons qui se réalisent avec zéro probabilité.

4.9 Exemples de processus aléatoires:

Bruit thermique (thermal noise)

Le bruit électrique qui apparait du mouvement aléatoire des électrons dans les conducteurs, est dit un bruit thermique. On peut montrer que la densité spectrale de puissance du voltage bruit thermique aux bornes d'une résistance, est donnée par :

$$S_{nn}(f) = 2kTR \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

où $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ est la constante de Boltzmann, et T est la température absolue en K . La Figure 2.10 illustre l'allure de la densité spectrale de puissance du bruit thermique.

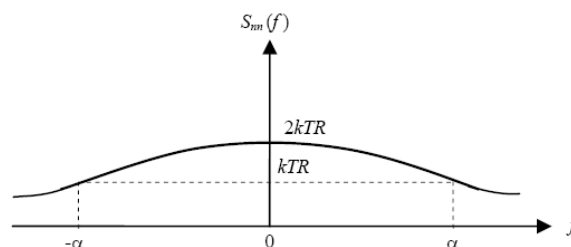


Fig. 2.10 densité spectrale du bruit thermique

Cependant, α est de l'ordre de 10^{14} rad/s ($10^{13} \text{ Hz} = 10^4 \text{ GHz}$ qui est plus grande que la plupart des fréquences utilisées dans les circuits électriques. Alors $(\alpha^2 + \omega^2)/\alpha^2 \rightarrow 1$ est le bruit thermique est considéré comme un processus bruit blanc avec un spectre plat de valeur $2kTR \text{ V}^2/\text{Hz}$ comme c'est montré dans la Figure 2.11.

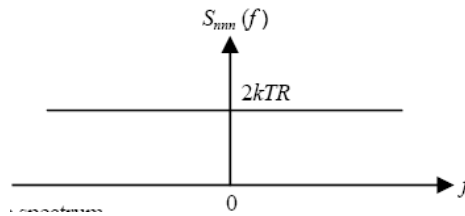


Fig.2.11 spectre du bruit blanc

En plus, puisque le nombre des électrons dans une résistance est très large avec des mouvements aléatoires statistiquement indépendants, à partir du théorème de la limite centrale, le bruit thermique est modélisé comme gaussien avec une moyenne zéro. De ce fait, le voltage bruit thermique est un processus blanc gaussien de moyenne zéro. La résistance peut être modélisée par le circuit équivalent de thévenin, qui est constitué d'une résistance nonbruitée en série avec une source bruit de tension. La Figure 2.12 (a) illustre ce circuit. La valeur quadratique moyenne de cette source bruitée est :

$$E[V_n^2(t)] = 4kTR$$

On peut encore modéliser la résistance bruitée par un circuit équivalent de Norton, qui est constitué d'une résistance nonbruitée en parallèle avec une source bruit courant comme c'est montré dans la Figure 2.12 (b). La valeur quadratique moyenne de cette source est :

$$E[I_n^2(t)] = 4kTG$$

où $G = 1/R$ est une admittance. La densité spectrale de la source de tension bruit est la source de courant bruit sont respectivement :

$$S_{v_nv_n}(f) = 2kTR \text{ V}^2/\text{Hz}$$

$$S_{i_n i_n}(f) = 2kTG \text{ A}^2/\text{Hz}$$

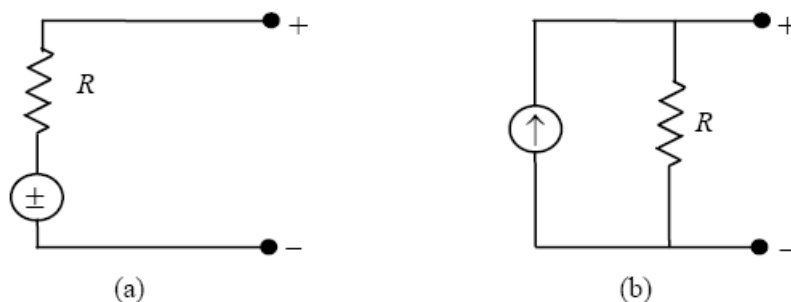


Fig.2.12 Résistance bruitée : (a) le circuit équivalent de Thévenin

(b) le circuit équivalent de Norton

Théorème de Nyquist

Considérer un réseau passif RLC comme c'est montré dans la Figure 2.13. la tension aux bornes du réseau est $v(t)$ et $Z(j\omega)$ est l'impédance. Alors, la densité spectrale de puissance de la tension bruit du circuit ouvert due à toutes les sources du bruit thermique est donnée par :

$$S_{v_n v_n}(f) = 2kT\Re\{Z(j\omega)\}$$

Ou bien, la densité spectrale de puissance du courant bruit du court circuit est donnée par :

$$S_{i_n i_n}(f) = 2kT\Re\{Y(j\omega)\}$$

où $Y(j\omega) = 1/Z(j\omega)$ est l'admittance de l'entrée du réseau et $\omega = 2\pi f$

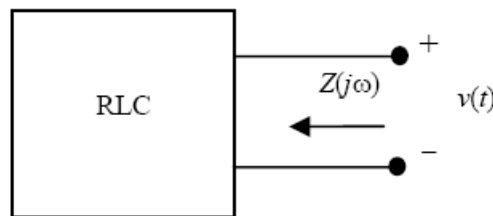


Fig.2.13 Le réseau passif RLC

Exemple

Déterminer la densité spectrale de puissance du voltage $v(t)$ aux bornes du réseau RC de la Figure 2.14, du au bruit thermique généré dans R, en utilisant :

- Le circuit équivalent de thévenin
- Le circuit équivalent de Norton
- Le théorème de Nyquist

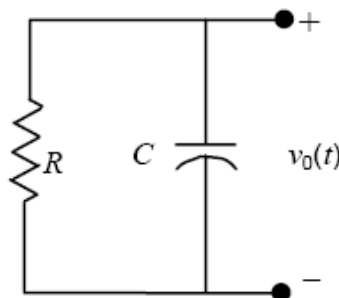


Fig. 2.14 le réseau RC

Solution

Circuit équivalent de thévenin

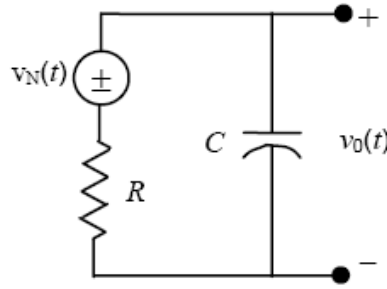


Fig. 2.15 Circuit équivalent de thévenin

- (a) En utilisant le circuit équivalent de Thévenin, la fonction de transfert de la source bruit (en appliquant le diviseur de tension) est :

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Donc :

$$S_{v_0 v_0}(\omega) = S_{v_n v_n}(\omega) |H(j\omega)|^2 = \frac{2kTR}{1 + (\omega RC)^2}$$

- (b) En utilisant le circuit équivalent de Norton, le circuit résultant est illustré dans la Figure 2.15.

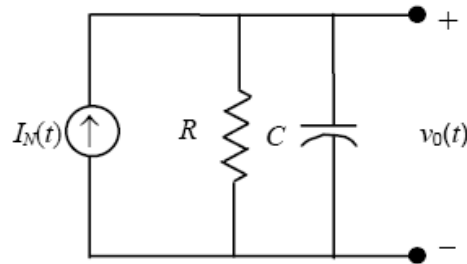


Fig. 2.15 Circuit équivalent de Norton

La fonction de transfert dans ce cas est :

$$H(j\omega) = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

La densité spectrale de puissance de la tension de sortie est :

$$S_{v_0 v_0}(\omega) = S_{i_n i_n}(\omega) |H(j\omega)|^2 = \frac{2kT}{R} \frac{R^2}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{2kTR}{1 + (\omega RC)^2}$$

- (c) L'impédance vue aux bornes du réseau est :

$$Z(j\omega) = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

D'après le théorème de Nyquist, la densité spectrale de puissance de la source de tension bruit est :

$$S_{v_0 v_0}(\omega) = 2kT \Re\{Z(j\omega)\} = \frac{2kTR}{1 + (\omega RC)^2}$$

Nous remarquons bien que les trois méthodes de (a), (b) et (c) mènent au même résultat.

Généralement, la densité spectrale de puissance du processus bruit blanc est dénoté par :

$$S_{nn}(f) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < f < \infty$$

La fonction d'autocorrelation est alors :

$$R_{nn}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

Puisque la bande passante des systèmes réels est finie, la DSP $S_{nn}(f)$ sur une bande de fréquences finie mène à une puissance moyenne finie.