

**Module Physique 6**  
**Mécanique du solide indéformable**  
**Série N°1**

**Exercice 1:**

On considère dans  $\mathbb{R}^3$  le champ de vecteurs :  $\vec{V}_t(P) = (1+3y-tz, -3x+2tz, 2+tx-t^2z)_{\mathcal{R}}$ .

1. Pour quelle valeur de  $t$  ce champ est-il un torseur ?
2. Lorsque c'est un torseur, calculer son vecteur.

**Exercice 2:**

1. Montrer qu'un torseur  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U})$  est nul si et seulement si sa résultante générale est nulle et il existe un point  $C$  en lequel son moment est nul:

$$\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U}) = 0 \Leftrightarrow \vec{R} = \vec{0} \text{ et } \exists C / \vec{U}(C) = \vec{0}$$

2. Montrer que deux torseurs  $\mathcal{T}_1(\vec{R}_1, \vec{U}_1)$  et  $\mathcal{T}_2(\vec{R}_2, \vec{U}_2)$  sont égaux si et seulement si ils ont la même résultante générale et il existe un point  $C$  en lequel leurs moments sont égaux :  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \vec{R}_1 = \vec{R}_2$  et  $\exists C / \vec{U}_1(C) = \vec{U}_2(C)$

3. Soit  $\vec{F}$  un vecteur lié ( $\vec{F} \neq 0$ ) d'origine  $A$ , qu'on note  $(A, \vec{F})$ , montrer alors que le champ vectoriel  $\vec{M}: P \mapsto \vec{M}(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F}$  est un torseur qu'on note  $\mathcal{T}_{\vec{F}}(\vec{F}, \vec{M})$  et que ce torseur est un glisseur.

4. Soit  $A \rightarrow \vec{f}(A)$  un champ de vecteurs défini sur un domaine  $\Omega$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , montrer que le champ vectoriel  $\vec{M}: P \mapsto \vec{M}(P) = \int_{\Omega} \overrightarrow{Pa} \wedge \vec{f}(a) da$  est un torseur qu'on

note  $\mathcal{T}_{\vec{f}}(\vec{R}, \vec{M})$ , et qu'il est donné par:  $\mathcal{T}_{\vec{f}} = \left[ \begin{array}{l} \vec{R} = \int_{\Omega} \vec{f}(a) da \\ \vec{M}(P) = \int_{\Omega} \overrightarrow{Pa} \wedge \vec{f}(a) da \end{array} \right]$ .

5. Montrer qu'un torseur  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U})$  non nul est un couple si et seulement si son champ  $\vec{U}(P)$  est uniforme.

**Exercice 3:**

Soient  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U})$  et  $\mathcal{T}'(\vec{R}', \vec{U}')$  deux torseurs donnés, montrer que :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}' \Leftrightarrow \exists P_1, P_2, P_3 \text{ (3 points non alignés) tels que: } \vec{U}(P_i) = \vec{U}'(P_i) \text{ pour } i=1,2,3.$$

**Exercice 4:**

On se donne deux glisseurs  $(A, \vec{V})$  et  $(A', \vec{V}')$  tel que  $A(1,1,\alpha)$ ,  $A'(0,2,0)$ ,  $\vec{V}(0,0,\alpha)$  et  $\vec{V}'(\beta,3,0)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels. Soit  $\mathcal{C} = (A, \vec{V}) + (A', \vec{V}')$ .

1. Donner les éléments de réduction de  $\mathcal{C}$  en O.
2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{C}$  soit un glisseur?
3. Déterminer l'axe central de  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 5:**

Soient A, B et C trois points dont les coordonnées, dans le repère  $\mathcal{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , sont données par  $A(ap, aq, 0)$ ,  $B(-aq, ap, 0)$  et  $C(0, 0, a)$  où a, p et q sont des constantes scalaires connues tels que  $a > 0$ ,  $p \neq 0$  et  $p^2 + q^2 = 1$ . On considère le torseur  $\mathcal{C}(\vec{R}, \vec{M})$  tel que:

$$\begin{aligned}\vec{M}(A) \cdot \vec{y}_0 &= apq \quad \text{et} \quad \vec{M}(A) \cdot \vec{z}_0 = 0 \\ \vec{M}(B) \cdot \vec{x}_0 &= apq \quad \text{et} \quad \vec{M}(B) \cdot \vec{z}_0 = a \\ \vec{M}(C) \cdot \vec{x}_0 &= aq(1+p) \quad \text{et} \quad \vec{M}(C) \cdot \vec{y}_0 = ap(q-1).\end{aligned}$$

1. Déterminer la résultante  $\vec{R}$  de  $\mathcal{C}$ .
2. Compléter la détermination des moments  $\vec{M}(A)$ ,  $\vec{M}(B)$  et  $\vec{M}(C)$ .

**Exercice 6:**

Dans un repère  $\mathcal{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs liés suivants:  $\vec{V}_1 = (1, 0, -1)$  d'origine  $A = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{V}_2 = (1, 2, 2)$  d'origine  $B = (0, 1, 0)$  et  $\vec{V}_3 = (\lambda, \mu, \nu)$  d'origine  $C = (0, 0, 1)$ . Soit  $\mathcal{C}$  la somme de ces glisseurs.

1. Déterminer  $\lambda, \mu, \nu$  pour que  $\mathcal{C}$  soit un couple et trouver son moment.
2. Quelle relation doit relier  $\lambda, \mu, \nu$  pour que  $\mathcal{C}$  soit un glisseur?
3. Déterminer  $\mu, \nu$  en fonction de  $\lambda$  pour que le support du glisseur  $\mathcal{C}$  passe par le point  $D = (1/3, 1, 4/3)$ .
4. Dans le cas où  $(\lambda, \mu, \nu) = (-2, 0, -1)$  trouver l'équation de l'axe central de  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 7:**

On considère dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , les torseurs  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  dont les éléments de réduction en O sont respectivement  $\{(\cos \alpha, -\sin \alpha, 0); (-a \sin \alpha, -a \cos \alpha, 0)\}$  et  $\{(\cos \alpha, \sin \alpha, 0); (-a \sin \alpha, a \cos \alpha, 0)\}$ , où a et  $\alpha$  sont des constantes non nulles données, avec  $\alpha \in [0, \pi]$ .

1. Préciser la nature de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .
2. Soit  $\mathcal{C} = \lambda_1 \mathcal{C}_1 + \lambda_2 \mathcal{C}_2$  où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont deux réels, trouver l'invariant scalaire I de  $\mathcal{C}$ , le comoment de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et trouver une relation entre I et ce comoment.
3. Définir l'axe central de  $\mathcal{C}$ . Préciser cet axe lorsque  $\lambda_1 = \lambda_2$ , puis lorsque  $\lambda_1 = -\lambda_2$ .

**Module Physique 6**  
**TD de mécanique du solide indéformable**  
**Corrigé de la série N°1**

**Exercice 1:**

**1)** Le champ vectoriel  $\vec{V}_t : P \rightarrow \vec{V}_t(P) = (1+3y-tz, -3x+2tz, 2+tx-t^2z)_{\mathcal{R}}$  est un torseur si l'application linéaire qui lui est associée est antisymétrique. Fixons un point  $A \in \mathbb{R}^3$ , l'application linéaire associée au champ  $\vec{V}_t$  est définie par :  $L : \overrightarrow{AP} \rightarrow L(\overrightarrow{AP}) = \vec{V}_t(P) - \vec{V}_t(A)$ . En prenant  $A = O$ , avec  $O$  l'origine du repère  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{R}^3$ , il vient la matrice suivante de  $L$  dans la base de  $B = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  de  $\mathcal{R}$  :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{R}}(L) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -t \\ -3 & 0 & 2t \\ t & 0 & -t^2 \end{bmatrix}. A \text{ est antisymétrique si et seulement si } A^t = -A. \text{ Sachant}$$

$$\text{que } A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & t \\ 3 & 0 & 0 \\ -t & 2t & -t^2 \end{bmatrix}, \text{ cette condition donne } 2t = 0 \text{ et } -2t^2 = 0, \text{ soit } \boxed{t=0}.$$

Le champ  $\vec{V}_t$  est un torseur si et seulement si  $t = 0$ .  $\vec{V}_0 : P \rightarrow \vec{V}_0(P) = (1+3y, -3x, 2)_{\mathcal{R}}$ .

**2) Méthode 1:** Le vecteur du torseur  $\vec{V}_0$  est  $\vec{R} = [r_1 \ r_2 \ r_3]_{\mathcal{R}}^t$  avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & -t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ce qui donne } r_1 = r_2 = 0 \text{ et } r_3 = -3. \text{ D'où } \vec{R} = -3\vec{z}_0.$$

**Méthode 2:** Le vecteur du torseur  $\vec{V}_0$  est  $\vec{R} = [r_1 \ r_2 \ r_3]_{\mathcal{R}}^t$  avec  $\vec{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge L(\vec{e}_i)$ .

Démonstration :

On a :  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$  et  $L(\vec{e}_i) = \vec{R} \wedge \vec{e}_i \quad i=1,2,3.$  D'où

$\vec{e}_i \wedge L(\vec{e}_i) = \vec{e}_i \wedge (\vec{R} \wedge \vec{e}_i) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i)\vec{R} - (\vec{e}_i \cdot \vec{R})\vec{e}_i.$  Ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge L(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i)\vec{R} - \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot \vec{R})\vec{e}_i = 3\vec{R} - \vec{R} = 2\vec{R}.$$

Application :

On a :  $L(\vec{e}_1) = -3\vec{e}_2, \quad L(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1, \quad L(\vec{e}_3) = \vec{0}, \quad \vec{e}_1 \wedge L(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \wedge (-3\vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = -3\vec{e}_3,$

$\vec{e}_2 \wedge L(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \wedge (3\vec{e}_1) = 3\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -3\vec{e}_3.$  D'où  $\vec{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge L(\vec{e}_i) = \frac{1}{2} (-3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_3) = -3\vec{e}_3.$

## Exercice 2:

### 1) \* Implication directe

Supposons que le torseur  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U})$  est nul. Alors  $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{U}(P) = \vec{U}(Q) = \vec{0}$ . Mais  $\vec{U}(P) = \vec{U}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$ , d'où  $\vec{R} \wedge \overrightarrow{QP} = \vec{0}$  pour tout couple  $(P, Q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Le vecteur  $\vec{R}$  étant parallèle à tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$ , il vérifie nécessairement  $\vec{R} = \vec{0}$ . Donc on a bien :  $\vec{R} = \vec{0}$  et  $\exists C / \vec{U}(C) = \vec{0}$ , cette dernière étant vérifiée en fait pour tous les points de  $\mathbb{R}^3$ .

### \* Implication réciproque

Supposons que le torseur  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U})$  est tel que :  $\vec{R} = \vec{0}$  et  $\exists C / \vec{U}(C) = \vec{0}$  et soit  $P \in \mathbb{R}^3$ . Par la formule de distribution on a :  $\vec{U}(P) = \vec{U}(C) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ , et le torseur  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U})$  est nul.

### 2) \* Implication directe

Supposons que  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ , alors  $\vec{U}_1(P) = \vec{U}_2(P)$  pour tout point  $P \in \mathbb{R}^3$ . D'où  $\vec{U}_1(P) - \vec{U}_2(P) = (\vec{U}_1 - \vec{U}_2)(P)$ , et le torseur  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$  est nul. D'après la question 1,  $\vec{R}_1 - \vec{R}_2 = \vec{0}$  et  $\exists C / (\vec{U}_1 - \vec{U}_2)(C) = \vec{0}$ , c'est-à-dire :  $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$  et  $\exists C / \vec{U}_1(C) = \vec{U}_2(C)$ .

### \* Implication réciproque

Supposons que  $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$  et  $\exists C / \vec{U}_1(C) = \vec{U}_2(C)$  et soit  $P \in \mathbb{R}^3$ . Par la formule de distribution, on a :  $\vec{U}_1(P) = \vec{U}_1(C) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{CP} = \vec{U}_2(C) + \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{CP} = \vec{U}_2(P)$ , pour tout point  $P \in \mathbb{R}^3$ . Donc  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ .

### 3) Soit $\vec{F} \neq \vec{0}$ un vecteur lié d'origine A.

\* Montrons que le champ vectoriel (moment)  $\vec{M} : P \rightarrow \vec{M}(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F}$  est un torseur.

Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , on a :  $\vec{M}(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA}) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{QA} \wedge \vec{F} = \vec{M}(Q) + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{F}$ , d'où  $\boxed{\vec{M}(P) = \vec{M}(Q) + \vec{F} \wedge \overrightarrow{PQ}}$  qui est la propriété fondamentale qui caractérise un torseur. Ce torseur particulier est noté  $\mathcal{T}_{\vec{F}}(\vec{F}, \vec{M})$  où  $\vec{M}$  est le moment en un point donné.

\* Montrons que ce torseur est un glisseur.

On a :  $\vec{M}(A) = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ , comme  $\vec{F} \neq \vec{0}$  le torseur  $\mathcal{T}_{\vec{F}}(\vec{F}, \vec{M})$  est un glisseur. On peut

l'écrire sous la forme :  $\mathcal{T}_{\vec{F}} = \underset{A}{\left[ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right]}$ .

4) Soit  $A \rightarrow \vec{f}(A)$  un champ de vecteurs défini sur un domaine  $\Omega$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , et le champ vectoriel  $\vec{M} : P \mapsto \vec{M}(P) = \int_{\Omega} \overrightarrow{Pa} \wedge \vec{f}(a) da$ . Montrons que ce champ est un torseur.

Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , on a :

$$\vec{M}(P) = \int_{\Omega} \overrightarrow{Pa} \wedge \vec{f}(a) da = \int_{\Omega} (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qa}) \wedge \vec{f}(a) da = \int_{\Omega} \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{f}(a) da + \int_{\Omega} \overrightarrow{Qa} \wedge \vec{f}(a) da,$$

soit

$$\vec{M}(P) = \overrightarrow{PQ} \wedge \left( \int_{\Omega} \vec{f}(a) da \right) + \int_{\Omega} \overrightarrow{Qa} \wedge \vec{f}(a) da = \vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}, \text{ avec } \vec{R} = \int_{\Omega} \vec{f}(a) da.$$

On note ce

torseur :  $\mathcal{T}_{\vec{f}} = \left[ \begin{array}{c} \vec{R} = \int_{\Omega} \vec{f}(a) da \\ \vec{M}(P) = \int_{\Omega} \overrightarrow{Pa} \wedge \vec{f}(a) da \end{array} \right]_P.$

**Remarque :** le torseur  $\mathcal{T}_{\vec{f}}$  n'est pas nécessairement un glisseur (confère exercice 5).

### 5) \*Implication directe

Supposons que  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U})$  est un couple, alors  $\vec{R} = \vec{0}$  et le champ est non nul (car un couple est non nul par définition). Soit  $P \in \mathbb{R}^3$ , alors  $\vec{U}(P) = \vec{U}(A)$  avec  $A$  un point fixe quelconque. Donc, le champ  $\vec{U}$  est uniforme non nul.

### \* Implication réciproque

Supposons que le champ  $\vec{U}$  est uniforme non nul. Soit  $A$  un point fixe et  $P \in \mathbb{R}^3$  un point quelconque, alors la relation de distribution permet d'écrire :  $\vec{U}(P) = \vec{U}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$  où  $\vec{R}$  est le vecteur du torseur. On en déduit que  $\vec{U}(P) = \vec{U}(A) \Rightarrow \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP} = \vec{0}$  pour tout vecteur  $\overrightarrow{AP}$ . Le vecteur  $\vec{R}$  est donc parallèle à tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , il est donc nécessairement nul,  $\vec{R} = \vec{0}$  et le champ  $\vec{U}$  définit un torseur  $\mathcal{T}(\vec{0}, \vec{U})$  qui est un couple.

### Exercice 3:

#### \*Implication directe

Supposons que  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U}) = \mathcal{T}(\vec{R}', \vec{U}')$ , alors  $\vec{R}' = \vec{R}$  et  $\exists C / \vec{U}(C) = \vec{U}'(C)$ . Soit  $P \in \mathbb{R}^3$ , alors  $\vec{U}(P) = \vec{U}(C) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{CP}$  et  $\vec{U}'(P) = \vec{U}'(C) + \vec{R}' \wedge \overrightarrow{CP}$ , donc  $\vec{U}'(P) = \vec{U}(P)$ . L'égalité étant vérifiée pour tous les points  $P \in \mathbb{R}^3$ , elle est en particulier vraie pour trois points non alignés.

#### \* Implication réciproque

Supposons qu'il existe trois points  $P_1, P_2, P_3$  non alignés pour lesquels :  $\vec{U}(P_i) = \vec{U}'(P_i)$ , alors  $\vec{U}(P_3) = \vec{U}(P_1) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}$  et  $\vec{U}'(P_3) = \vec{U}'(P_1) + \vec{R}' \wedge \overrightarrow{P_1P_3}$ . D'où  $(\vec{R} - \vec{R}') \wedge \overrightarrow{P_1P_3} = \vec{0}$ . De même, on vérifie que  $(\vec{R} - \vec{R}') \wedge \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{0}$ . Le vecteur  $(\vec{R} - \vec{R}')$  est à la fois parallèle à  $\overrightarrow{P_1P_2}$  et à  $\overrightarrow{P_1P_3}$ . Il est nécessairement nul car  $\overrightarrow{P_1P_2}$  et  $\overrightarrow{P_1P_3}$  sont non colinéaires vu que les trois points  $P_1, P_2, P_3$  sont non alignés. On en déduit que  $\vec{R}' = \vec{R}$  et puisque les deux torseurs  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U}) = \mathcal{T}(\vec{R}', \vec{U}')$  coïncident en un point (en fait ici en trois points), ils sont identiques (d'après la question 2 de l'exercice 2).

#### Exercice 4:

1) Calcul des éléments de réduction en O.

\* On a :  $\vec{\tau} = (A, \vec{V}) + (A', \vec{V}')$ . En notant ce torseur  $\vec{\tau}(\vec{R}, \vec{U})$ , il vient immédiatement  $\vec{R} = \vec{V} + \vec{V}'$ , soit  $\vec{R} = (\alpha \vec{z}_0) + (\beta \vec{x}_0 + 3\vec{y}_0)$ . En réarrangeant  $\vec{R} = \beta \vec{x}_0 + 3\vec{y}_0 + \alpha \vec{z}_0$ .

\* Le champ en O s'obtient par addition des champs des deux glisseurs  $(A, \vec{V})$  et  $(A', \vec{V}')$  en O, soit  $\vec{U}(O) = \vec{OA} \wedge \vec{V} + \vec{OA'} \wedge \vec{V}'$ . Calculons les deux produits vectoriels

$$\vec{OA} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \vec{x}_0 - \alpha \vec{y}_0 \quad \text{et} \quad \vec{OA'} \wedge \vec{V}' = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \beta & 3 & 0 \end{bmatrix} = -2\beta \vec{z}_0. \quad \text{D'où}$$

$$\vec{U}(O) = \alpha \vec{x}_0 - \alpha \vec{y}_0 - 2\beta \vec{z}_0.$$

2) Puisque  $\vec{R} = \beta \vec{x}_0 + 3\vec{y}_0 + \alpha \vec{z}_0 \neq \vec{0}$  pour tout réels  $\alpha$  et  $\beta$ , le torseur  $\vec{\tau}(\vec{R}, \vec{U})$  est un glisseur  $\Leftrightarrow I = \vec{R} \cdot \vec{U}(O) = 0$ .

$$\text{On a : } \vec{R} \cdot \vec{U}(O) = (\beta \vec{x}_0 + 3\vec{y}_0 + \alpha \vec{z}_0) \cdot (\alpha \vec{x}_0 - \alpha \vec{y}_0 - 2\beta \vec{z}_0) = \alpha\beta - 3\alpha - 2\alpha\beta = -3\alpha - \alpha\beta = -\alpha(3 + \beta).$$

$$\text{D'où } \vec{R} \cdot \vec{U}(O) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = -3.$$

Conclusion :  $\vec{\tau}(\vec{R}, \vec{U})$  est un glisseur si et seulement si  $\alpha = 0$  ou  $\beta = -3$ .

3) Axe central de  $\vec{\tau}(\vec{R}, \vec{U})$ .

$\vec{R} = \beta \vec{x}_0 + 3\vec{y}_0 + \alpha \vec{z}_0 \neq \vec{0}$  donc l'axe central existe. Dans le polycopié trois méthodes peuvent être appliquées pour trouver l'équation cartésienne ou paramétrique de l'axe central  $\Delta$ .

- Méthode 1 du polycopié :

$P \in \Delta \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{UP} = \lambda \vec{R}$ . Or  $\vec{UP} = \vec{U}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP}$ . En posant:  $\vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ , il

$$\text{vient : } \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -2\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ 3 \\ \alpha \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \beta \\ 3 \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} \alpha + 3z - \alpha y = \lambda \beta \\ -\alpha + \alpha x - \beta z = 3\lambda \\ -2\beta + \beta y - 3x = \lambda \alpha \end{cases}, \text{ soit après élimination de } \lambda \text{ les}$$

$$\text{équations cartésiennes suivantes : } \boxed{\frac{\alpha - \alpha y + 3z}{\beta} = \frac{-\alpha + \alpha x - \beta z}{3} = \frac{-2\beta - 3x + \beta y}{\alpha}} \quad (\text{en fait, il}$$

suffit d'en prendre deux équations parmi les trois possibles; la troisième étant liée avec les deux autres).

- Méthode 3 du polycopié :

On utilise pour déterminer l'axe central l'équation paramétrique suivante :

$$P \in \Delta \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{U}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}.$$

$$\text{On a : } \|\vec{R}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{et} \quad \vec{R} \wedge \vec{U}(O) = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \beta & 3 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & -2\beta \end{bmatrix}, \quad \text{soit}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{U}(O) = (-6\beta + \alpha^2)\vec{x}_0 + (\alpha^2 + 2\beta^2)\vec{y}_0 + (-\alpha\beta - 3\alpha)\vec{z}_0.$$

d'où  $\vec{OP} = \begin{bmatrix} \frac{-6\beta + \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 9} + \lambda\beta \\ \frac{\alpha^2 + 2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 9} + 3\lambda \\ \frac{-\alpha\beta - 3\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 9} + \lambda\alpha \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$  . L'axe central du torseur  $\mathcal{T}(\vec{R}, \vec{U})$  est la droite qui

passse par le point  $A = \begin{bmatrix} \frac{-6\beta + \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 9} \\ \frac{\alpha^2 + 2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 9} \\ \frac{-\alpha\beta - 3\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 9} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}$  et de vecteur directeur  $\vec{R} = \beta\vec{x}_0 + 3\vec{y}_0 + \alpha\vec{z}_0$ .

**Remarque :** les deux méthodes sont parfaitement équivalentes. La méthode 1 admet un avantage par rapport à la méthode 3 car elle permet d'obtenir rapidement les équations cartésiennes.

### Exercice 5:

1) Dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  les vecteurs  $\vec{M}(A)$ ,  $\vec{M}(B)$  et  $\vec{M}(C)$  et  $\vec{R}$  ont pour composantes :

$$\vec{M}(A) = \begin{bmatrix} \alpha \\ apq \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{M}(B) = \begin{bmatrix} apq \\ \beta \\ a \end{bmatrix}, \quad \vec{M}(C) = \begin{bmatrix} aq(p+1) \\ ap(q-1) \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} \quad \text{où } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ sont les}$$

composantes inconnues.

Les égalités suivantes provenant de la relation de distribution :

$\vec{M}(B) = \vec{M}(C) + \vec{R} \wedge \vec{CB}$ ,  $\vec{M}(C) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AC}$  et  $\vec{M}(A) = \vec{M}(B) + \vec{R} \wedge \vec{BA}$  entraînent les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} apq \\ \beta \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aq(p+1) \\ ap(q-1) \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -aq \\ ap \\ -a \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} apq = aq(p+1) - aR_y - apR_z \\ \beta = ap(q-1) + aR_x - aqR_z \\ a = \gamma + apR_x + aqR_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = aq - aR_y - apR_z \\ \beta = ap(q-1) + aR_x - aqR_z \\ a = \gamma + apR_x + aqR_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} aq(p+1) \\ ap(q-1) \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ apq \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -ap \\ -aq \\ a \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aq(p+1) = \alpha + aR_y + aqR_z \\ ap(q-1) = apq - aR_x - apR_z \\ \gamma = -aqR_x + apR_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aq(p+1) = \alpha + aR_y + aqR_z \\ -ap = -aR_x - apR_z \\ \gamma = -aqR_x + apR_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ apq \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} apq \\ \beta \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a(p+q) \\ a(q-p) \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = apq - a(q-p)R_z \\ apq = \beta + a(p+q)R_z \\ 0 = a + a(q-p)R_x - a(p+q)R_y \end{cases}$$

Parmi les 9 équations, les 3 équations suivantes ne font pas intervenir les inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  :

$$\begin{cases} R_y + pR_z = q \\ R_x + pR_z = p \\ (p-q)R_x + (p+q)R_y = 1 \end{cases}$$

Ce système peut être résolu en substituant  $R_x$  et  $R_y$  par leurs expressions en fonction de  $R_z$  dans la troisième équation, il vient alors :

$$\begin{cases} R_y = q - pR_z \\ R_x = p - pR_z \\ p(p-q)(1-R_z) + (p+q)(q-pR_z) = 1 \end{cases} \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} R_y = q - pR_z \\ R_x = p - pR_z \\ (p^2 - pq) - (p^2 - pq)R_z + (pq + q^2) - (p^2 + pq)R_z = 1 \end{cases}, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} R_y = q - pR_z \\ R_x = p - pR_z \\ -2p^2R_z = 0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \boxed{\begin{cases} R_x = p \\ R_y = q \\ R_z = 0 \end{cases}}$$

2) Pour le calcul de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , nous pouvons utiliser les équations :

$$\begin{cases} \alpha = apq - a(q-p)R_z \\ \beta = ap(q-1) + aR_x - aqR_z \\ \gamma = -aqR_x + apR_y \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha = apq \\ \beta = apq \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{Nous pouvons vérifier que les trois équations}$$

$$\text{qui restent à savoir } \begin{cases} aq(p+1) = \alpha + aR_y + aqR_z \\ apq = \beta + a(p+q)R_z \\ a = \gamma + apR_x + aqR_y \end{cases} \quad \text{sont bien vérifiées : } \begin{cases} aq(p+1) = \alpha + aq \\ apq = \beta \\ a = \gamma + ap^2 + aq^2 \end{cases}.$$

$$\text{Il vient donc finalement : } \vec{M}(A) = \begin{bmatrix} apq \\ apq \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{M}(B) = \begin{bmatrix} apq \\ apq \\ a \end{bmatrix} \text{ et } \vec{M}(C) = \begin{bmatrix} aq(p+1) \\ ap(q-1) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Exercice 6 :

1) Posons  $\mathcal{C}_1 = (A, \vec{V}_1)$ ,  $\mathcal{C}_2 = (B, \vec{V}_2)$  et  $\mathcal{C}_3 = (C, \vec{V}_3)$ . Le torseur somme des trois glisseurs précédents est donc :  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3$ .

$\mathcal{C}$  est un couple  $\Leftrightarrow \vec{R} = \vec{0}$  et  $\exists P: \vec{U}(P) \neq \vec{0}$ .

On a :  $\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ . D'où  $\vec{R} = (\lambda+2)\vec{x}_0 + (\mu+2)\vec{y}_0 + (v+1)\vec{z}_0$ .  $\vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = -2, \mu = -2, v = -1$ .

Le moment du couple est constant, nous pouvons le calculer au point A. D'où

$$\vec{U}(A) = \vec{V}_2 \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{V}_3 \wedge \overrightarrow{CA}. \text{ Or } \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \quad \text{ce qui donne}$$

$$\vec{V}_2 \wedge \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 - 3\vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{V}_3 \wedge \overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2\vec{x}_0 - 3\vec{y}_0 + 2\vec{z}_0. \text{ D'où}$$

$\vec{U}(A) = 4\vec{x}_0 - \vec{y}_0 - \vec{z}_0$ . On constate que  $\vec{U}(A) \neq \vec{0}$  donc le torseur est bien un couple lorsque  $\lambda = -2, \mu = -2, v = -1$ .

2)  $\mathcal{T}$  est un glisseur  $\Leftrightarrow I=0$  et  $\vec{R} \neq \vec{0}$ .

La deuxième condition impose :  $\lambda \neq -2$  ou  $\mu \neq -2$  ou  $v \neq -1$ .

Par définition, on a :  $I = \vec{R} \cdot \vec{U}(A)$ .

$\vec{U}(A) = \vec{V}_2 \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{V}_3 \wedge \overrightarrow{CA}$ , d'après la première question :  $\vec{V}_2 \wedge \overrightarrow{BA} = 2\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 - 3\vec{z}_0$ .

$$\vec{V}_3 \wedge \overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \lambda & \mu & v \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mu\vec{x}_0 + (\lambda+v)\vec{y}_0 - \mu\vec{z}_0. \text{ D'où : } \vec{U}(A) = \begin{bmatrix} 2-\mu \\ \lambda+v+2 \\ -\mu-3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \text{ et}$$

$$I = \vec{R} \cdot \vec{U}(A) = \vec{U}(A) \cdot \begin{bmatrix} \lambda+2 \\ \mu+2 \\ v+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\mu \\ \lambda+v+2 \\ -\mu-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda+2 \\ \mu+2 \\ v+1 \end{bmatrix} = 4\lambda - \mu - v + 5.$$

$$I=0 \Leftrightarrow 4\lambda - \mu - v + 5 = 0.$$

Finalement le torseur  $\mathcal{T}$  est un glisseur si et seulement si :  $4\lambda - \mu - v + 5 = 0$  et ( $\lambda \neq -2$  ou  $\mu \neq -2$  ou  $v \neq -1$ ).

3) Le support du torseur passe par le point D  $\Leftrightarrow \vec{U}(D) = \vec{0}$ .

Par la relation de distribution des torseurs, on a :  $\vec{U}(D) = \vec{U}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AD}$ . Avec

$$\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \text{ et } \vec{R} = \begin{bmatrix} \lambda+2 \\ \mu+2 \\ v+1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}, \text{ il vient :}$$

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \lambda+2 & \mu+2 & v+1 \\ -2/3 & 1 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\mu/3 - v + 5/3 \\ -4\lambda/3 - 2v/3 - 10/3 \\ \lambda + 2\mu/3 + 10/3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}.$$

$$\text{D'où } \vec{U}(D) = \begin{bmatrix} 2-\mu \\ \lambda+v+2 \\ -\mu-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\mu/3 - v + 5/3 \\ -4\lambda/3 - 2v/3 - 10/3 \\ \lambda + 2\mu/3 + 10/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu/3 - v + 11/3 \\ -\lambda/3 + v/3 - 4/3 \\ \lambda - \mu/3 + 1/3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}.$$

$$\vec{U}(D) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu/3 - v + 11/3 = 0 \\ -\lambda/3 + v/3 - 4/3 = 0 \\ \lambda - \mu/3 + 1/3 = 0 \end{cases}.$$

Pour résoudre ce système, il suffit de calculer  $v$  et  $\lambda$

en fonction de  $\mu$  à partir de la première et troisième équation et de remplacer leurs expressions dans la deuxième équation. Il vient alors :  $v = \mu/3 + 11/3$  et  $\lambda = \mu/3 - 1/3$ , puis  $v - \lambda - 4 = \mu/3 + 11/3 - \mu/3 + 1/3 - 4 = 0$ , soit  $11/3 + 1/3 - 4 = 0$ , ce qui est toujours vérifié, le système est donc compatible. Il existe alors une infinité de solutions. Exprimons  $\mu, v$  en fonction de  $\lambda$ . La troisième équation permet d'écrire :  $\boxed{\mu = 3\lambda + 1}$ . En substituant cette dernière équation dans la première équation, on obtient :  $\boxed{v = \lambda + 4}$ .

4) On utilise la méthode 2 du polycopié (page 31).

Soit  $P(x, y, z)$  un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $\Delta$  l'axe central du torseur, on a :

$$P \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \vec{U}(P) \wedge \vec{R} = \vec{0}.$$

En utilisant la relation de distribution, on a :  $\vec{U}(P) = \vec{U}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$ . D'après la question

$$2, \text{ on a : } \vec{U}(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \quad \text{et} \quad \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}, \text{ d'où : } \vec{U}(P) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2z \\ -1 \\ 2-2x \end{bmatrix}.$$

$$\text{Le calcul donne : } \vec{U}(P) \wedge \vec{R} = \begin{bmatrix} 2+2z \\ -1 \\ -1-2x \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+2 \\ 0 \\ 4z+4 \end{bmatrix}. \quad \vec{U}(P) \wedge \vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ z = -1 \end{cases}. \text{ Donc}$$

l'axe central est la droite passant par le point de coordonnées  $(-1/2, 0, -1)$  et parallèle à l'axe des  $y$ .

### Exercice 7:

1) En réduisant les torseurs en  $O$ , on a :  $\mathcal{T}_1 = (\vec{R}_1, \vec{U}_1(O))$  et  $\mathcal{T}_2 = (\vec{R}_2, \vec{U}_2(O))$ , avec :

$$\vec{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}, \quad \vec{U}_1(O) = \begin{bmatrix} -a \sin(\alpha) \\ -a \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}, \quad \vec{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}, \quad \vec{U}_2(O) = \begin{bmatrix} -a \sin(\alpha) \\ a \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}.$$

Nous remarquons que  $\vec{R}_1 \neq \vec{0}$  et  $\vec{R}_2 \neq \vec{0}$ .

- Le torseur  $\mathcal{T}_1 = (\vec{R}_1, \vec{U}_1(O))$  est un glisseur  $\Leftrightarrow I_1 = \vec{R}_1 \cdot \vec{U}_1(O) = 0$ . Le calcul du produit scalaire donne :  $I_1 = \vec{R}_1 \cdot \vec{U}_1(O) = -a \sin(\alpha) \cos(\alpha) + a \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0$ . Donc, puisque  $\vec{R}_1 \neq \vec{0}$ , le torseur  $\mathcal{T}_1 = (\vec{R}_1, \vec{U}_1(O))$  est bien un glisseur.
- De même  $I_2 = \vec{R}_2 \cdot \vec{U}_2(O) = 0$ , ce qui permet de conclure, puisque  $\vec{R}_2 \neq \vec{0}$ , que le torseur  $\mathcal{T}_2 = (\vec{R}_2, \vec{U}_2(O))$  est un glisseur.

2) Soit  $\mathcal{T} = \lambda_1 \mathcal{T}_1 + \lambda_2 \mathcal{T}_2$  où  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

#### \* Invariant scalaire de $\mathcal{T}$

On a :  $I = \vec{R} \cdot \vec{U}(O)$ , avec  $\vec{R} = \lambda_1 \vec{R}_1 + \lambda_2 \vec{R}_2$  et  $\vec{U}(O) = \lambda_1 \vec{U}_1(O) + \lambda_2 \vec{U}_2(O)$ . Le calcul donne

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2) \cos(\alpha) \\ (\lambda_2 - \lambda_1) \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \quad \text{et} \quad \vec{U}(O) = \begin{bmatrix} -a(\lambda_1 + \lambda_2) \sin(\alpha) \\ a(\lambda_2 - \lambda_1) \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}, \text{ puis}$$

$$I = a [(\lambda_2 - \lambda_1)^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2] \sin(\alpha) \cos(\alpha) = -4\lambda_1 \lambda_2 a \sin(\alpha) \cos(\alpha). \quad \boxed{I = -2\lambda_1 \lambda_2 a \sin(2\alpha)}.$$

#### \* Comment de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$

Par définition, on a :  $\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 = \vec{R}_1 \cdot \vec{U}_2(O) + \vec{R}_2 \cdot \vec{U}_1(O)$  et le calcul donne

$$\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 = -2a \sin(\alpha) \cos(\alpha) - 2a \sin(\alpha) \cos(\alpha) = -4a \sin(\alpha) \cos(\alpha), \text{ soit } \boxed{\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 = -2a \sin(2\alpha)}$$

Par comparaison de  $I$  et  $\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2$ , on obtient :  $\boxed{I = \lambda_1 \lambda_2 \mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2}$ .

### 3) Axe central du torseur $\mathcal{C}$

Soit  $P(x, y, z)$  un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $\Delta$  l'axe central du torseur  $\mathcal{C}$ , on a :

$P \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{U}(P) = k\vec{R}$ . En utilisant la relation de distribution, on a :

$$\vec{U}(P) = \begin{bmatrix} -a(\lambda_1 + \lambda_2) \sin(\alpha) \\ a(\lambda_2 - \lambda_1) \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2) \cos(\alpha) \\ (\lambda_2 - \lambda_1) \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a(\lambda_1 + \lambda_2) \sin(\alpha) + (\lambda_2 - \lambda_1)z \sin(\alpha) \\ a(\lambda_2 - \lambda_1) \cos(\alpha) - (\lambda_1 + \lambda_2)z \cos(\alpha) \\ (\lambda_1 + \lambda_2)y \cos(\alpha) + (\lambda_1 - \lambda_2)x \sin(\alpha) \end{bmatrix}.$$

D'où les équations cartésiennes de l'axe central qui s'écrivent :

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)y \cos(\alpha) + (\lambda_1 - \lambda_2)x \sin(\alpha) = 0 \\ \frac{-a(\lambda_1 + \lambda_2) \sin(\alpha) + (\lambda_2 - \lambda_1)z \sin(\alpha)}{(\lambda_1 + \lambda_2) \cos(\alpha)} = \frac{a(\lambda_2 - \lambda_1) \cos(\alpha) - (\lambda_1 + \lambda_2)z \cos(\alpha)}{(\lambda_2 - \lambda_1) \sin(\alpha)}, \text{ soit} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)y \cos(\alpha) + (\lambda_1 - \lambda_2)x \sin(\alpha) = 0 \\ [(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \sin^2(\alpha) + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \cos^2(\alpha)]z = a(\lambda_2^2 - \lambda_1^2). \end{cases}$$

- cas  $\lambda_1 = \lambda_2$

Dans ce cas :  $\begin{cases} \lambda_1 y \cos(\alpha) = 0 \\ \lambda_1^2 \cos^2(\alpha) z = 0 \end{cases}$ , soit dans le cas  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\alpha \neq \pi/2$  :  $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ , c'est-à-

dire l'axe des  $x$ .

Si  $\lambda_1 = 0$ , alors le torseur est nul.

Si  $\alpha = \pi/2$  et  $\lambda_1 \neq 0$ , alors  $\vec{U}(O) = \begin{bmatrix} -2a\lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , le torseur est un couple.

- cas  $\lambda_1 = -\lambda_2$

Dans ce cas :  $\begin{cases} 2\lambda_1 x \sin(\alpha) = 0 \\ 4\lambda_1^2 \sin^2(\alpha) z = 0 \end{cases}$ , soit dans le cas  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\alpha \neq 0$   $\alpha \neq \pi$  :  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ,

c'est-à-dire l'axe des  $y$ .

Si  $\lambda_1 = 0$ , alors le torseur est nul

Si  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$  et  $\lambda_1 \neq 0$ , alors  $\vec{U}(O) = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 2a\lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , le torseur est un

couple.

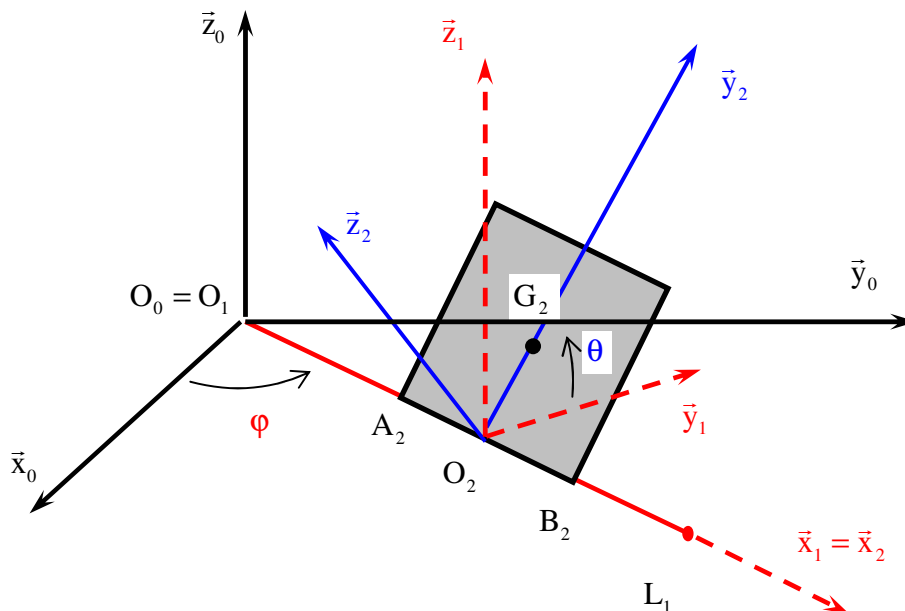
**Module Physique 6**  
**Mécanique du solide indéformable**  
**Série N°2**

**Exercice 1:**

Soient  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère de référence, orthonormé direct,  $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  un repère lié au solide  $S_1$  et  $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  un repère lié au solide  $S_2$ . Les deux corps  $S_1$  et  $S_2$  sont en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

►  $S_1$  est une barre  $O_1L_1$  de longueur  $2\ell$  dont l'extrémité  $O_1$  coïncide avec  $O_0$ ; elle se déplace dans le plan  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , et on la repère par le paramètre  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ , mesuré autour de  $\vec{z}_0$ ;  $\overrightarrow{O_1L_1} = 2\ell\vec{x}_1$ , avec  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ .

►  $S_2$  est une plaque carrée, de côté  $2a$ , qui peut glisser et tourner autour de  $(O_1, \vec{x}_1)$ ,  $\overrightarrow{A_2B_2} = 2a\vec{x}_2$ , ( $\ell > a$ ),  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ ;  $G_2$  étant le centre de la plaque et  $O_2$  le milieu de  $A_2B_2$ , on pose  $\overrightarrow{O_2G_2} = a\vec{y}_2$ . On repère  $S_2$  par les paramètres  $\overrightarrow{O_1O_2} = \lambda\vec{x}_1$ ,  $(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta$ , mesuré autour de  $\vec{x}_1$ .



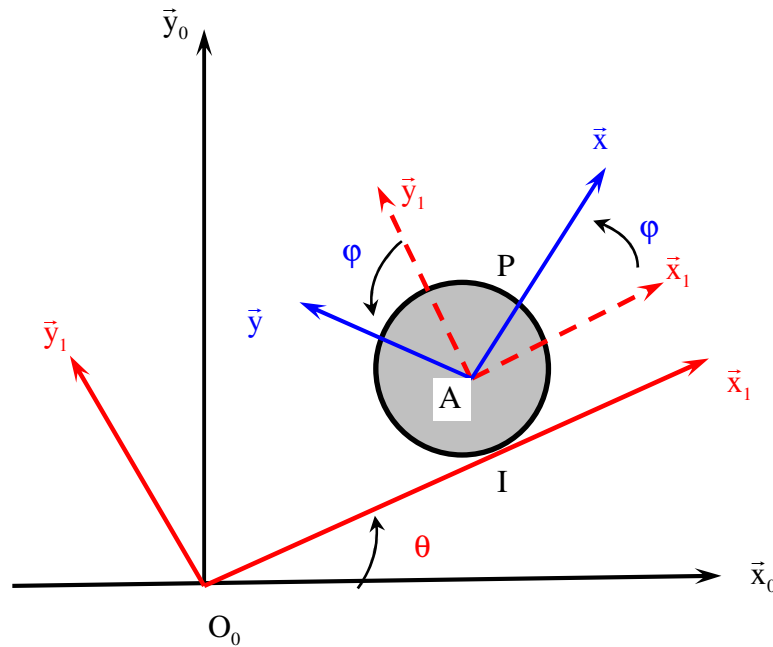
1. Calculer vectoriellement la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de  $G_2$  (repère relatif  $\mathcal{R}_1$  et repère absolu  $\mathcal{R}_0$ ). En déduire les composantes dans  $\mathcal{R}_1$  de la vitesse absolu de  $G_2$ .

2. Calculer les composantes de l'accélération absolu de  $G_2$  en projection dans  $\mathcal{R}_1$  :

2.1. Par la méthode de dérivation vectorielle composée.

2.2. En appliquant le théorème de composition des accélérations.

## Exercice 2:



Soit  $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  un repère orthonormé direct déduit d'un repère fixe orthonormé direct  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par une rotation de vecteur  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0$ . On matérialisera l'axe  $\overrightarrow{O_0x_1}$  sur lequel un disque  $D(A, a)$  est astreint à se déplacer en restant dans le plan  $(\overrightarrow{O_0x_0}, \overrightarrow{O_0y_0})$ . Si  $I$  est le point de contact et  $P$  un point lié au disque, on pose :  $(\overrightarrow{Ax_1}, \overrightarrow{AP}) = \varphi$  et  $\overrightarrow{O_0I} = r\vec{x}_1$ . On peut aussi définir le repère orthonormé direct lié au disque  $D(A, a)$  par  $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$  avec  $\overrightarrow{AP} = a\vec{x}$  où  $\vec{x}$  est le vecteur unitaire de la direction  $\overrightarrow{AP}$ . Tous les résultats seront exprimés dans la base associée au repère  $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ .

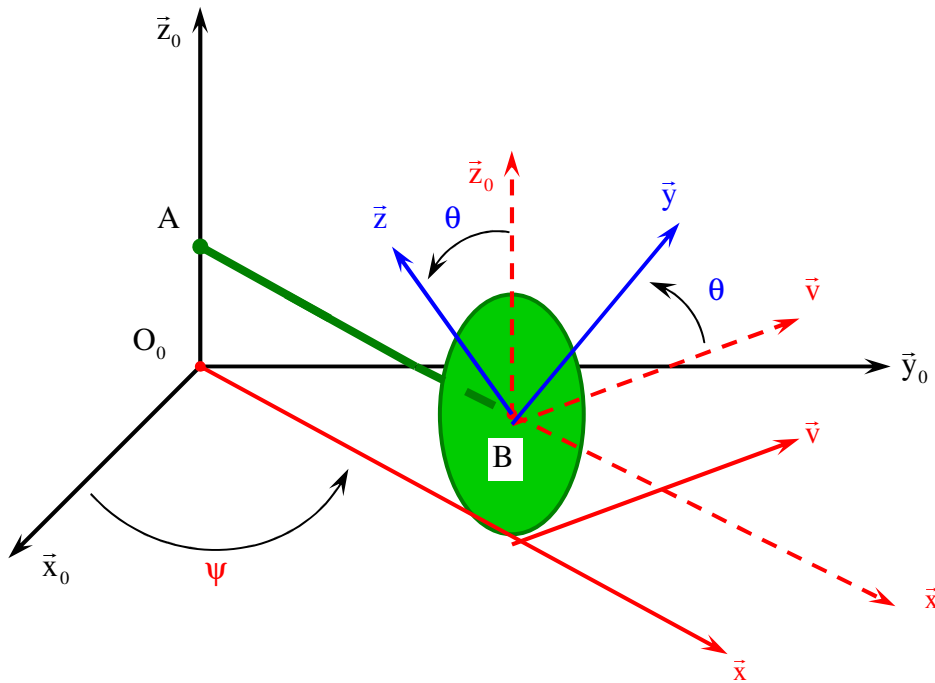
1. Calculer la vitesse de glissement  $\vec{V}(I \in C/\mathcal{R}_1)$ , du disque  $D(A, a)$  sur la droite  $O\vec{x}_1$ . Evaluer  $\vec{V}(I/\mathcal{R}_1)$ ,  $\vec{V}(I/\mathcal{R})$  et trouver  $\vec{V}(I \in C/\mathcal{R}_1)$ .
2. Donner l'expression du vecteur accélération  $\vec{\gamma}(I \in C/\mathcal{R}_1)$  du point de contact  $I$ .
3. On étudie le mouvement de  $P$  dans le repère  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  considéré comme absolu. Si  $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est le repère relatif, donner les expressions :
  - 3.1. Des vitesses  $\vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$ ,  $\vec{V}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$  et  $\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)$ .
  - 3.2. Des accélérations  $\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_1)$ ,  $\vec{\gamma}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ ,  $\vec{\gamma}_c$  et  $\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_0)$ .

### Exercice 3:

Soit  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère fixe orthonormé et direct et soit un solide  $S$  constitué du disque, de centre  $B$  et de rayon  $a$ , et du segment  $AB$  de longueur  $a$ . La tige étant perpendiculaire au plan contenant le disque. Le solide  $S$  est mobile de façon que  $\overrightarrow{O_0A} = a\vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{z}_0 = 0$ .

Soit  $P$  un point lié à la circonférence du disque et soit  $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère orthonormé direct défini par  $\vec{x} = \overrightarrow{AB}/a$  et  $\vec{z} = \overrightarrow{BP}/a$ . On définit aussi un autre repère orthonormé direct intermédiaire  $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ .

1. Définir les paramètres de position du solide  $S$ .
2. Déterminer, en fonction des vecteurs de la base associée au repère  $\mathcal{R}_1$ , le vecteur vitesse instantanée,  $\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)$ , du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .
3. Déterminer, en fonction des vecteurs de la base associée au repère  $\mathcal{R}_1$ , le vecteur accélération instantanée,  $\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_0)$ , du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .



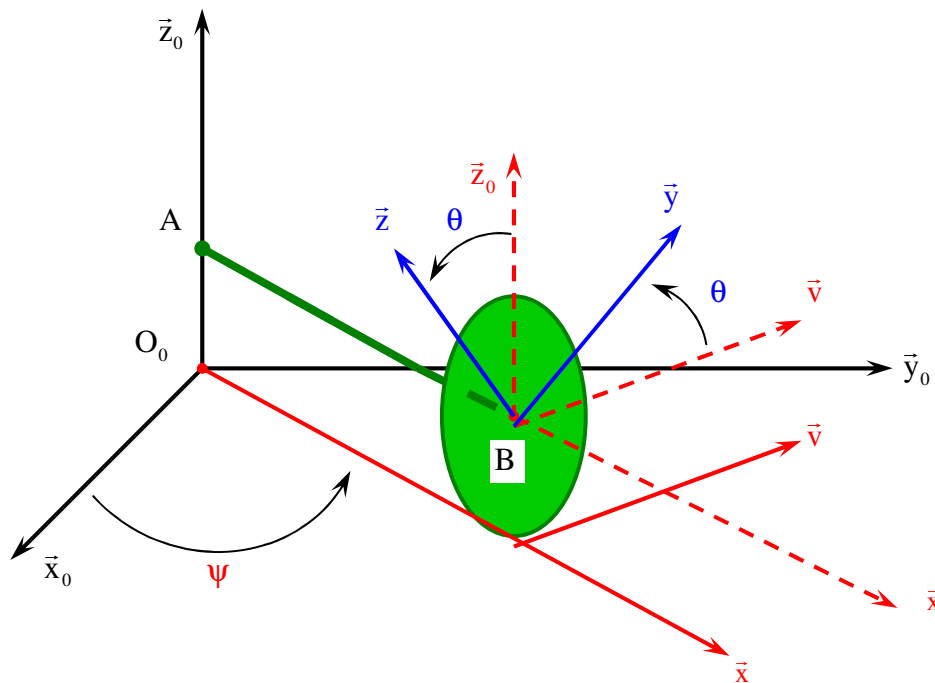
**Module Physique 6**  
**Mécanique du solide indéformable**  
**Série N°2 (suite)**

**Exercice 3:**

Soit  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère fixe orthonormé et direct et soit un solide  $S$  constitué du disque, de centre  $B$  et de rayon  $a$ , et du segment  $AB$  de longueur  $a$ . La tige étant perpendiculaire au plan contenant le disque. Le solide  $S$  est mobile de façon que  $\overrightarrow{O_0A} = a\vec{z}_0$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{z}_0 = 0$ .

Soit  $P$  un point lié à la circonférence du disque et soit  $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère orthonormé direct défini par  $\vec{x} = \overrightarrow{AB}/a$  et  $\vec{z} = \overrightarrow{BP}/a$ . On définit aussi un autre repère orthonormé direct intermédiaire  $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ .

1. Définir les paramètres de position du solide  $S$ .
2. Déterminer, en fonction des vecteurs de la base associée au repère  $\mathcal{R}_1$ , le vecteur vitesse instantanée,  $\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)$ , du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .
3. Déterminer, en fonction des vecteurs de la base associée au repère  $\mathcal{R}_1$ , le vecteur accélération instantanée,  $\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_0)$ , du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .



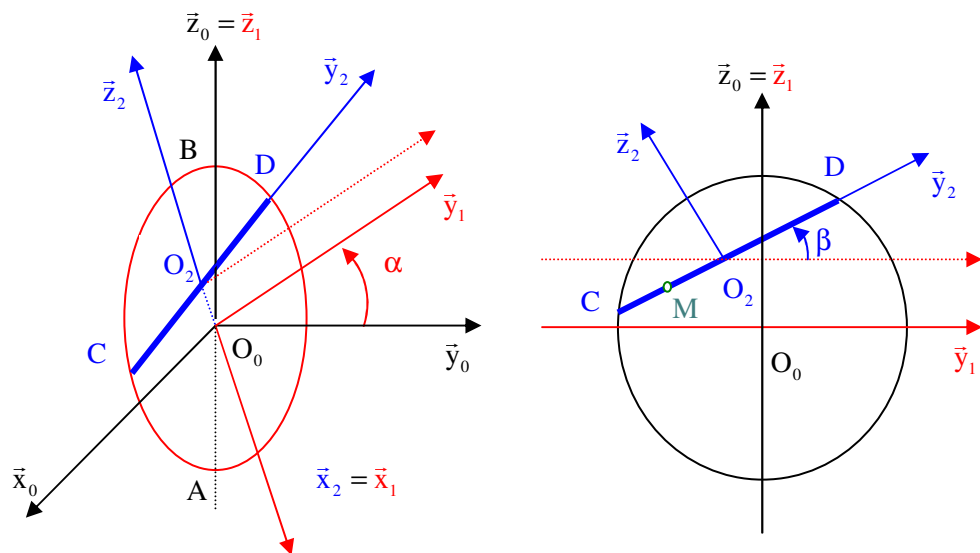
#### Exercice 4 :

Soit  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère fixe orthonormé et direct et  $S_1$  un solide rigide ayant la forme d'un cerceau de rayon  $a\sqrt{2}$ .  $S_1$  est mobile autour d'un diamètre fixe  $\overline{AB} = 2\overline{O_1B} = 2a\sqrt{2}\vec{z}_1$  ( $O_1 = O_0, \vec{z}_1 = \vec{z}_0$ ) ;  $\vec{x}_1$  étant un vecteur unitaire porté par l'axe du cerceau, on repère  $S_1$  par l'angle  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ , mesuré autour de  $\vec{z}_0$ .

$S_2$  est une barre CD de longueur  $2a$ . On suppose que les extrémités C et D peuvent coulisser tout le long de  $S_1$ .  $O_2$  est au milieu de la barre et on pose  $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ ,  $\overline{CD} = 2\overline{O_2D} = 2a\vec{y}_2$ . On note  $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ , mesuré autour de  $\vec{x}_1$ .

Soit M un point mobile sur  $S_2$  dont on repère la position par  $\overline{O_2M} = y\vec{y}_2$ .

- 1) Calculer les vitesses des extrémités C et D du solide  $S_2$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- 2) Calculer en prenant  $\mathcal{R}_1$  pour repère relatif, les vitesses d'entraînement de C et D. En déduire les vitesses absolues de C et D.
- 3) Calculer la vitesse de M par rapport à  $\mathcal{R}_0$  (on exprimera les composantes dans  $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ )
- 4) Calculer, avec  $\mathcal{R}_2$  pour repère relatif, les accélérations relative, de Coriolis, d'entraînement, du mobile M. En déduire l'accélération absolue.
- 5) Retrouver l'accélération absolue par la méthode de dérivation vectorielle composée.



**Module Physique 6**  
**TD de mécanique du solide indéformable**  
**Corrigé de la série N°2**

**Exercice 1 :**

Les repères qui interviennent sont :

- $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  repère absolu,
- $\mathcal{R}_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  premier repère relatif lié au solide  $S_1$  ( $O_1 = O_0$ ),
- $\mathcal{R}_2 (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  deuxième repère relatif lié au solide  $S_2$ .

**1) \* Calcul de la vitesse relative (repère relatif  $\mathcal{R}_1$  et repère absolu  $\mathcal{R}_0$ )**

**Méthode 1 : Calcul direct**

Le vecteur vitesse de  $G_2$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est défini par:

$$\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d\vec{O_1G_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1}. \text{ Or } \vec{O_1G_2} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2G_2} = \lambda\vec{x}_1 + a\vec{y}_2, \text{ d'où}$$

$$\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d\vec{O_1G_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \left. \frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \left. \frac{d\vec{O_2G_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1}. \text{ Avec } \left. \frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \dot{\lambda}\vec{x}_1 \text{ et}$$

$$\left. \frac{d\vec{O_2G_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \left. \frac{d\vec{O_2G_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{O_2G_2} = \vec{0} + (\dot{\theta}\vec{x}_1) \wedge (a\vec{y}_2) = (\dot{\theta}\vec{x}_2) \wedge (a\vec{y}_2) = a\dot{\theta}\vec{z}_2, \text{ il vient}$$

$$\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + a\dot{\theta}\vec{z}_2.$$

**Méthode 2: Composition des vitesses (repère relatif  $\mathcal{R}_2$  et repère absolu  $\mathcal{R}_1$ )**

Par la formule de composition des vitesses, on a:  $\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_1) = \vec{V}(G_2/\mathcal{R}_2) + \vec{V}(G_2 \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$ .

\*  $\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_2) = \vec{0}$  ( $G_2$  est fixe dans  $\mathcal{R}_2$ )

\* En utilisant la relation de distribution du torseur cinématique (champ des vitesses de  $S_2$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$ ) avec les points  $O_2$  et  $G_2$  de  $S_2$ , il vient :

$$\vec{V}(G_2 \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \vec{V}(O_2 \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{O_2G_2} \quad \text{avec} \quad \vec{V}(O_2 \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \dot{\lambda}\vec{x}_1 \quad \text{et}$$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{O_2G_2} = (\dot{\theta}\vec{x}_1) \wedge (a\vec{y}_2) = (\dot{\theta}\vec{x}_2) \wedge (a\vec{y}_2) = a\dot{\theta}\vec{z}_2. \text{ D'où } \vec{V}(G_2 \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + a\dot{\theta}\vec{z}_2.$$

**\* Calcul de la vitesse d'entraînement de  $G_2$  (repère relatif  $\mathcal{R}_1$  et repère absolu  $\mathcal{R}_0$ )**

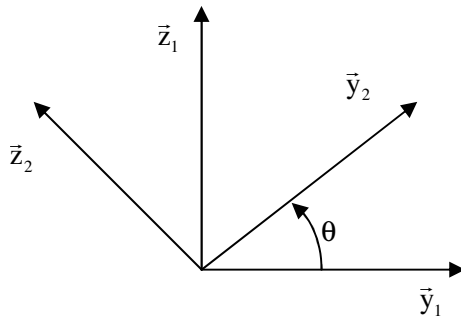
Cette vitesse est par définition :  $\vec{V}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ . Pour la calculer, on utilise la relation de distribution du torseur cinématique du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , ainsi :

$$\vec{V}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_1 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_1G_2}. \text{ Avec } \vec{V}(O_1 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$$

et  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_1G_2} = (\dot{\phi}\vec{z}_0) \wedge (\lambda\vec{x}_1 + a\vec{y}_2) = (\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge (\lambda\vec{x}_1 + a\cos(\theta)\vec{y}_1 + a\sin(\theta)\vec{z}_1) = \lambda\dot{\phi}\vec{y}_1 - a\dot{\phi}\cos(\theta)\vec{x}_1$ , on obtient  $\vec{V}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{0} + \lambda\dot{\phi}\vec{y}_1 - a\dot{\phi}\cos(\theta)\vec{x}_1$ , soit  $\boxed{\vec{V}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = -a\dot{\phi}\cos(\theta)\vec{x}_1 + \lambda\dot{\phi}\vec{y}_1}$ .

### \* Vitesse absolue de $G_2$ exprimée dans $\mathcal{R}_1$

Par composition des vitesses, on a :  $\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(G_2/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ . D'où  $\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0) = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + a\dot{\theta}\vec{z}_2 - a\dot{\phi}\cos(\theta)\vec{x}_1 + \lambda\dot{\phi}\vec{y}_1$ . Pour obtenir cette vitesse dans  $\mathcal{R}_1$ , il suffit d'exprimer le vecteur  $\vec{z}_2$  dans la base de  $\mathcal{R}_1$ . La représentation graphique suivante est utile pour cela.



La figure montre ainsi que  $\vec{z}_2 = -\sin(\theta)\vec{y}_1 + \cos(\theta)\vec{z}_1$ . D'où

$\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0) = (\dot{\lambda} - a\dot{\phi}\cos(\theta))\vec{x}_1 + \lambda\dot{\phi}\vec{y}_1 + a\dot{\theta}(-\sin(\theta)\vec{y}_1 + \cos(\theta)\vec{z}_1)$ , soit

$\boxed{\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0) = (\dot{\lambda} - a\dot{\phi}\cos(\theta))\vec{x}_1 + (\lambda\dot{\phi} - a\dot{\theta}\sin(\theta))\vec{y}_1 + a\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{z}_1}$ , ou encore

$$\boxed{\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} - a\dot{\phi}\cos(\theta) \\ \lambda\dot{\phi} - a\dot{\theta}\sin(\theta) \\ a\dot{\theta}\cos(\theta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}}$$

## 2.1) Méthode de dérivation vectorielle composée

Par définition de l'accélération absolue, on a :  $\vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$ .

Le fait que, dans la question précédente, le vecteur  $\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0)$  ait été projeté dans  $\mathcal{R}_1$  nous invite à utiliser la formule suivante de dérivation composée

$$\vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0).$$

$$\star \left. \frac{d\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \frac{d(\dot{\lambda} - a\dot{\phi}\cos(\theta))}{dt}\vec{x}_1 + \frac{d(\lambda\dot{\phi} - a\dot{\theta}\sin(\theta))}{dt}\vec{y}_1 + \frac{d(a\dot{\theta}\cos(\theta))}{dt}\vec{z}_1, \text{ soit}$$

$$\left. \frac{d\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = (\ddot{\lambda} - a\ddot{\phi}\cos(\theta) + a\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta))\vec{x}_1 + (\dot{\lambda}\dot{\phi} + \lambda\ddot{\phi} - a\ddot{\theta}\sin(\theta) - a\dot{\theta}^2\cos(\theta))\vec{y}_1 + (a\ddot{\theta}\cos(\theta) - a\dot{\theta}^2\sin(\theta))\vec{z}_1$$

$$\star \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0) = (\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge [(\dot{\lambda} - a\dot{\phi}\cos(\theta))\vec{x}_1 + (\lambda\dot{\phi} - a\dot{\theta}\sin(\theta))\vec{y}_1 + a\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{z}_1], \text{ soit}$$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(G_2/\mathcal{R}_0) = -\dot{\phi}(\lambda\dot{\phi} - a\dot{\theta}\sin(\theta))\vec{x}_1 + \dot{\phi}(\dot{\lambda} - a\dot{\phi}\cos(\theta))\vec{y}_1.$$

$$\text{D'où } \boxed{\vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \ddot{\lambda} - \lambda\dot{\phi}^2 - a\ddot{\phi}\cos(\theta) + 2a\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta) \\ 2\dot{\lambda}\dot{\phi} + \lambda\ddot{\phi} - a\ddot{\theta}\sin(\theta) - a(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)\cos(\theta) \\ a\ddot{\theta}\cos(\theta) - a\dot{\theta}^2\sin(\theta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}}.$$

## 2.2) Application du théorème de composition des accélérations

En prenant le repère relatif  $\mathcal{R}_1$  et le repère absolu  $\mathcal{R}_0$ , on a :

$$\vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R}_0) = \vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R}_1) + \underbrace{\vec{\gamma}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}_{\vec{\gamma}_e} + \underbrace{2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(G_2/\mathcal{R}_1)}_{\vec{\gamma}_e}.$$

$$* \vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R}_1) = \frac{d\vec{V}(G_2/\mathcal{R}_1)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + \frac{d(a\dot{\theta}\vec{z}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} = \ddot{\lambda}\vec{x}_1 + \frac{d(-a\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{y}_1)}{dt} + \frac{d(a\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{z}_1)}{dt}, \text{ soit :}$$

$$\vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R}_1) = \ddot{\lambda}\vec{x}_1 + (-a\ddot{\theta}\sin(\theta) - a\dot{\theta}^2\cos(\theta))\vec{y}_1 + (a\ddot{\theta}\cos(\theta) - a\dot{\theta}^2\sin(\theta))\vec{z}_1.$$

\* Par la formule du champ des accélérations d'un solide, appliquée aux points  $G_2$  et  $O_1$  supposés liés à  $\mathcal{R}_1$ , il vient :

$$\vec{\gamma}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{\gamma}(O_1 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_1G_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_1G_2}), \text{ soit}$$

$$\vec{\gamma}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{0} + \frac{d(\dot{\phi}\vec{z}_1)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} \wedge (\lambda\vec{x}_1 + a\vec{y}_2) + (\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge [(\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge (\lambda\vec{x}_1 + a\vec{y}_2)], \text{ ou encore}$$

$\vec{\gamma}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = (\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge (\lambda\vec{x}_1 + a\vec{y}_2) + (\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge [(\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge (\lambda\vec{x}_1 + a\vec{y}_2)]$ . La figure de la page précédente montre que  $\vec{y}_2 = \cos(\theta)\vec{y}_1 + \sin(\theta)\vec{z}_1$ . D'où

$$\vec{\gamma}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = (\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge (\lambda\vec{x}_1 + a\cos(\theta)\vec{y}_1 + a\sin(\theta)\vec{z}_1) + (\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge [(\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge (\lambda\vec{x}_1 + a\cos(\theta)\vec{y}_1 + a\sin(\theta)\vec{z}_1)], \text{ soit}$$

$$\vec{\gamma}(G_2 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \lambda\dot{\phi}\vec{y}_1 - a\dot{\phi}\cos(\theta)\vec{x}_1 + (\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge (\lambda\dot{\phi}\vec{y}_1 - a\dot{\phi}\cos(\theta)\vec{x}_1) = (-\lambda\dot{\phi}^2 - a\dot{\phi}\cos(\theta))\vec{x}_1 + (\lambda\dot{\phi} - a\dot{\phi}^2\cos(\theta))\vec{y}_1$$

$$* 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(G_2/\mathcal{R}_1) = 2(\dot{\phi}\vec{z}_1) \wedge (\dot{\lambda}\vec{x}_1 + a\dot{\theta}\vec{z}_2) = 2a\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta)\vec{x}_1 + 2\dot{\lambda}\dot{\phi}\vec{y}_1.$$

En additionnant les trois contributions de l'accélération absolue, il vient finalement :

$$\vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \ddot{\lambda} \\ -a\ddot{\theta}\sin(\theta) - a\dot{\theta}^2\cos(\theta) \\ a\ddot{\theta}\cos(\theta) - a\dot{\theta}^2\sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda\dot{\phi}^2 - a\dot{\phi}\cos(\theta) \\ \lambda\dot{\phi} - a\dot{\phi}^2\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta) \\ 2\dot{\lambda}\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ soit}$$

$$\vec{\gamma}(G_2/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \ddot{\lambda} - \lambda\dot{\phi}^2 + 2a\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta) - a\dot{\phi}\cos(\theta) \\ 2\dot{\lambda}\dot{\phi} + \lambda\dot{\phi} - a\ddot{\theta}\sin(\theta) - a(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)\cos(\theta) \\ a\ddot{\theta}\cos(\theta) - a\dot{\theta}^2\sin(\theta) \end{bmatrix} \Big|_{\mathcal{R}_1}.$$

### Remarque:

\* Les deux méthodes permettent d'obtenir le même résultat. Mais la méthode à base de la formule de dérivation vectorielle composée est la plus intéressante dans le cas de cet exercice car on y effectue moins de calculs.

\* En ombré jaune, sont indiquées les formules les plus importantes de la cinématique du solide indéformable. Ce sont elles qui gouvernent l'étude cinématique, le reste est un simple calcul qu'il faut savoir maîtriser aussi.

## Exercice 2:

Les repères qui interviennent sont :

- $\mathcal{R}_0 (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  repère fixe,
- $\mathcal{R}_1 (O_1 = O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$  repère mobile en rotation par rapport à  $\mathcal{R}_0$  ;  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\theta} \vec{z}_0$ ,
- $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} = \vec{z}_0)$  repère relatif lié au disque  $C(A, a)$  ,  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) = \dot{\phi} \vec{z}_0$ .

Le repère de travail est :  $\mathcal{R}_1 (O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ .

**1) \* Calcul de la vitesse de glissement du disque  $C(A, a)$  sur la droite  $O_0 \vec{x}_1$  :**  
 $\vec{V}(I \in C/\mathcal{R}_1)$

Le champ des vitesse du solide  $C(A, a)$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$  est un torseur, la relation de distribution permet d'écrire :  $\vec{V}(I \in C/\mathcal{R}_1) = \vec{V}(A \in C/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) \wedge \overline{AI}$ .

On a :  $\overline{O_0 A} = \overline{O_0 I} + \overline{IA} = r \vec{x}_1 + a \vec{y}_1$  ,  $\overline{AI} = -a \vec{y}_1$  et  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) = \dot{\phi} \vec{z}_0 = \dot{\phi} \vec{z}_1$ . D'où

$$\vec{V}(I \in C/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d\overline{O_0 A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) \wedge \overline{AI} = \dot{r} \vec{x}_1 + \dot{\phi} \vec{z}_1 \wedge (-a \vec{y}_1), \text{ soit } \boxed{\vec{V}(I \in C/\mathcal{R}_1) = (\dot{r} + a\dot{\phi}) \vec{x}_1}.$$

**\* Calcul de la vitesse du point géométrique I par rapport à  $\mathcal{R}_1$  :**  $\vec{V}(I/\mathcal{R}_1)$

$$\text{On a : } \overline{O_0 I} = r \vec{x}_1, \text{ d'où } \vec{V}(I/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d\overline{O_0 I}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1}, \text{ soit } \boxed{\vec{V}(I/\mathcal{R}_1) = \dot{r} \vec{x}_1}.$$

**\* Calcul de la vitesse du point géométrique I par rapport à  $\mathcal{R}$  :**  $\vec{V}(I/\mathcal{R})$

$$\text{On a : } \overline{AI} = -a \vec{y}_1, \text{ d'où } \vec{V}(I/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\overline{AI}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -a \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}}. \text{ Pour calculer cette dernière dérivée, on}$$

$$\text{utilise la formule de dérivation composée : } \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{y}_1.$$

$$\text{Avec } \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = -\dot{\phi} \vec{z}_1, \text{ il vient : } \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = (-\dot{\phi} \vec{z}_1) \wedge \vec{y}_1 = \dot{\phi} \vec{x}_1. \text{ D'où } \boxed{\vec{V}(I/\mathcal{R}) = -a\dot{\phi} \vec{x}_1}.$$

**Remarque :**

On vérifie bien que la vitesse de glissement du disque  $C(A, a)$  sur la droite  $O_0 \vec{x}_1$  est :

$$\boxed{\vec{V}(I \in C/\mathcal{R}_1) = \vec{V}(I/\mathcal{R}_1) - \vec{V}(I/\mathcal{R})}.$$

**2) Calcul de l'accélération de la particule de contact entre  $C(A, a)$  et la droite  $O_0 \vec{x}_1$  :**  $\vec{\gamma}(I \in C/\mathcal{R}_1)$ .

**Attention : il ne faut pas dire que l'accélération  $\vec{\gamma}(I \in C/\mathcal{R}_1)$  est la dérivée de la vitesse de glissement  $\vec{V}(I \in C/\mathcal{R}_1)$  par rapport au temps dans  $\mathcal{R}_1$  (c'était aussi le même problème entre l'accélération d'entraînement et la vitesse d'entraînement).**

Pour calculer  $\vec{\gamma}(I \in C/\mathcal{R}_1)$ , il suffit de lier le point I à instant donné au solide indéformable  $C(A, a)$ . Dans ce cas la propriété caractéristique du champ des accélérations d'un solide indéformable permet d'écrire :

$$\vec{\gamma}(I \in C/\mathcal{R}_1) = \vec{\gamma}(A \in C/\mathcal{R}_1) + \left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \overline{AI} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) \wedge \overline{AI}).$$

$$* \quad \bar{\gamma}(A \in C/\mathfrak{R}_1) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{O_0 A}}{dt^2} \right|_{\mathfrak{R}_1} = \left. \frac{d^2 (r\bar{x}_1 + a\bar{y}_1)}{dt^2} \right|_{\mathfrak{R}_1} = \ddot{r}\bar{x}_1.$$

$$* \quad \left. \frac{d\bar{\Omega}(\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_1)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_1} \wedge \overrightarrow{AI} = \left. \frac{d(\dot{\phi}\bar{z}_1)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_1} \wedge (-a\bar{y}_1) = \left. \frac{d(\dot{\phi}\bar{z}_1)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_1} \wedge (-a\bar{y}_1) = -a\dot{\phi}\bar{z}_1 \wedge \bar{y}_1 = a\dot{\phi}\bar{x}_1.$$

$$* \quad \bar{\Omega}(\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_1) \wedge (\bar{\Omega}(\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_1) \wedge \overrightarrow{AI}) = \bar{\Omega}(\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_1) \wedge [(\dot{\phi}\bar{z}_1) \wedge (-a\bar{y}_1)] = (\dot{\phi}\bar{z}_1) \wedge (a\dot{\phi}\bar{x}_1) = a\dot{\phi}^2 \bar{y}_1.$$

$$\text{D'où } \bar{\gamma}(I \in C/\mathfrak{R}_1) = \ddot{r}\bar{x}_1 + a\ddot{\theta}\bar{x}_1 + a\dot{\phi}^2 \bar{y}_1, \text{ soit } \boxed{\bar{\gamma}(I \in C/\mathfrak{R}_1) = (\ddot{r} + a\ddot{\theta})\bar{x}_1 + a\dot{\phi}^2 \bar{y}_1}.$$

### 3.1) \* Vitesse relative de P (repère absolu $\mathfrak{R}_0$ et repère relatif $\mathfrak{R}_1$ ) : $\bar{V}(P/\mathfrak{R}_1)$

On a :  $\overrightarrow{O_0 P} = \overrightarrow{O_0 I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AP} = r\bar{x}_1 + a\bar{y}_1 + a\bar{x}$ . Avec  $\bar{x} = \cos(\varphi)\bar{x}_1 + \sin(\varphi)\bar{y}_1$ , il vient :

$$\overrightarrow{O_0 P} = (r + a\cos(\varphi))\bar{x}_1 + a(1 + \sin(\varphi))\bar{y}_1. \text{ Par définition de la vitesse: } \bar{V}(P/\mathfrak{R}_1) = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0 P}}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_1}, \text{ on}$$

$$\text{obtient } \boxed{\bar{V}(P/\mathfrak{R}_1) = (\dot{r} - a\dot{\phi}\sin(\varphi))\bar{x}_1 + a\dot{\phi}\cos(\varphi)\bar{y}_1}.$$

### \* Vitesse d'entraînement de P dans le mouvement relatif de $\mathfrak{R}_1$ par rapport à $\mathfrak{R}_0$ .

On a :  $\bar{V}(P \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) = \bar{V}(O_0 \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) + \bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0 P}$ . Avec  $\bar{V}(O_0 \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) = \vec{0}$  et  $\bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0 P} = (\dot{\theta}\bar{z}_1) \wedge [(r + a\cos(\varphi))\bar{x}_1 + a(1 + \sin(\varphi))\bar{y}_1] = -a\dot{\theta}(1 + \sin(\varphi))\bar{x}_1 + \dot{\theta}(r + a\cos(\varphi))\bar{y}_1$ , il vient  $\boxed{\bar{V}(P \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) = -a\dot{\theta}(1 + \sin(\varphi))\bar{x}_1 + \dot{\theta}(r + a\cos(\varphi))\bar{y}_1}$ .

### \* Vitesse absolue de P : $\bar{V}(P/\mathfrak{R}_0)$

On utilise la théorème de composition des vitesses :  $\bar{V}(P/\mathfrak{R}_0) = \bar{V}(P/\mathfrak{R}_1) + \bar{V}(P \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0)$ .

D'où  $\bar{V}(P/\mathfrak{R}_0) = (\dot{r} - a\dot{\phi}\sin(\varphi))\bar{x}_1 + a\dot{\phi}\cos(\varphi)\bar{y}_1 - a\dot{\theta}(1 + \sin(\varphi))\bar{x}_1 + \dot{\theta}(r + a\cos(\varphi))\bar{y}_1$ , soit

$$\boxed{\bar{V}(P/\mathfrak{R}_0) = [\dot{r} - a\dot{\theta} - a(\dot{\theta} + \dot{\phi})\sin(\varphi)]\bar{x}_1 + [r\dot{\theta} + a(\dot{\theta} + \dot{\phi})\cos(\varphi)]\bar{y}_1}.$$

### 3.2) \* Accélération relative de P : $\bar{\gamma}(P/\mathfrak{R}_1)$

$$\text{On a : } \bar{\gamma}(P/\mathfrak{R}_1) = \left. \frac{d\bar{V}(P/\mathfrak{R}_1)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_1}, \text{ d'où : } \boxed{\bar{\gamma}(P/\mathfrak{R}_1) = (\ddot{r} - a\ddot{\phi}\sin(\varphi) - a\dot{\phi}^2 \cos(\varphi))\bar{x}_1 + (a\ddot{\phi}\cos(\varphi) - a\dot{\phi}^2 \sin(\varphi))\bar{y}_1}.$$

### \* Accélération d'entraînement de P : $\bar{\gamma}(P \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R})$

Par la formule du champ des accélérations d'un solide indéformable, appliquée aux points P et  $O_0$  supposés liés à  $\mathfrak{R}_1$ , il vient :

$$\bar{\gamma}(P \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) = \bar{\gamma}(O_0 \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) + \left. \frac{d\bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_0 P} + \bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) \wedge (\bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0 P}).$$

- $\bar{\gamma}(O_0 \in \mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) = \vec{0}$ .
- $\left. \frac{d\bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_0 P} = (\ddot{\theta}\bar{z}_1) \wedge [(r + a\cos(\varphi))\bar{x}_1 + a(1 + \sin(\varphi))\bar{y}_1]$ , c'est-à-dire  $\left. \frac{d\bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_0 P} = -a\ddot{\theta}(1 + \sin(\varphi))\bar{x}_1 + \ddot{\theta}(r + a\cos(\varphi))\bar{y}_1$ .
- D'après la question 3.1)  $\bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0 P} = -a\dot{\theta}(1 + \sin(\varphi))\bar{x}_1 + \dot{\theta}(r + a\cos(\varphi))\bar{y}_1$ , d'où

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_0P}) = (\dot{\theta} \vec{z}_1) \wedge [-a\dot{\theta}(1+\sin(\varphi)) \vec{x}_1 + \dot{\theta}(r+a\cos(\varphi)) \vec{y}_1], \text{ soit}$$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_0P}) = -\dot{\theta}^2 (r+a\cos(\varphi)) \vec{x}_1 - a\dot{\theta}^2 (1+\sin(\varphi)) \vec{y}_1.$$

En additionnant les trois contributions, il vient :

$$\vec{\gamma}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = -a\ddot{\theta}(1+\sin(\varphi)) \vec{x}_1 + \ddot{\theta}(r+a\cos(\varphi)) \vec{y}_1 - \dot{\theta}^2 (r+a\cos(\varphi)) \vec{x}_1 - a\dot{\theta}^2 (1+\sin(\varphi)) \vec{y}_1, \text{ soit}$$

$$\vec{\gamma}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = [-a\ddot{\theta}(1+\sin(\varphi)) - \dot{\theta}^2 (r+a\cos(\varphi))] \vec{x}_1 + [\ddot{\theta}(r+a\cos(\varphi)) - a\dot{\theta}^2 (1+\sin(\varphi))] \vec{y}_1.$$

**\* Accélération de Coriolis de P :**  $\vec{\gamma}_c(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$

$$\text{On a : } \vec{\gamma}_c(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(P/\mathcal{R}_1) = 2(\dot{\theta} \vec{z}_1) \wedge [(\dot{r} - a\dot{\varphi}\sin(\varphi)) \vec{x}_1 + a\dot{\varphi}\cos(\varphi) \vec{y}_1], \text{ soit}$$

$$\vec{\gamma}_c(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = -2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi) \vec{x}_1 + 2\dot{\theta}(\dot{r} - a\dot{\varphi}\sin(\varphi)) \vec{y}_1.$$

**\* Accélération absolue de P :**  $\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_0)$

On utilise le théorème de composition des accélérations :

$$\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_0) = \vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_1) + \vec{\gamma}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\gamma}_c(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0).$$

D'où

$$\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \ddot{r} - a\ddot{\varphi}\sin(\varphi) - a\dot{\varphi}^2\cos(\varphi) \\ a\dot{\varphi}\cos(\varphi) - a\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1} + \begin{bmatrix} -a\ddot{\theta}(1+\sin(\varphi)) - \dot{\theta}^2(r+a\cos(\varphi)) \\ \ddot{\theta}(r+a\cos(\varphi)) - a\dot{\theta}^2(1+\sin(\varphi)) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1} + \begin{bmatrix} -2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ 2\dot{\theta}(\dot{r} - a\dot{\varphi}\sin(\varphi)) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}$$

soit

$$\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \ddot{r} - a\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2 - a(\ddot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\varphi})\sin(\varphi) - a(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2\cos(\varphi) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - a\dot{\theta}^2 + a(\ddot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\varphi})\cos(\varphi) - a(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}.$$

**Remarque :**

\* En comparaison avec l'exercice 1, la seule nouvelle formule dans cet exercice est celle qui définit la vitesse de glissement de deux solides en contact (elle est mise en relief avec la couleur verte dans le présent corrigé).

\* On décrira la cinématique d'un solide indéformable en utilisant les 5 relations fondamentales qui sont mises en relief avec la couleur jaune dans le corrigé.

**Exercice 3:**

Les repères qui interviennent sont :

- $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  repère fixe orthonormé et direct,
- $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{z}_0)$  repère intermédiaire obtenu à partir de  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par la rotation d'angle d'Euler  $\psi$  autour de l'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$ ,
- $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  repère lié au solide s et dont la base est obtenue à partir de celle de  $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{z}_0)$  par la rotation d'angle d'Euler  $\theta$  autour de l'axe  $\vec{x}$ .

### 1) Paramètres de position du solide s

La configuration actuelle de s s'obtient par les deux rotations d'angles respectivement  $\psi$  et  $\theta$ . Les paramètres décrivant le mouvement du solide s sont donc les deux angles d'Euler  $\psi$  et  $\theta$ .

### 2) Calcul du vecteur vitesse instantanée : $\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)$

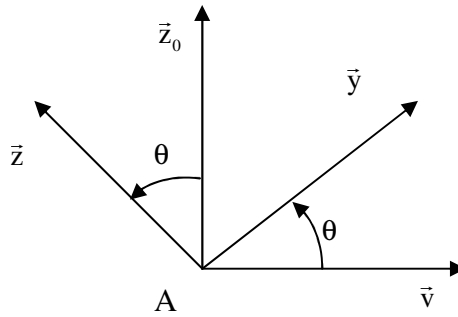
Le champ des vitesses du solide indéformable S par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est un torseur, d'où :

$$\vec{V}(P/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \overline{AP} \quad (P \text{ et } A \text{ sont deux points de } S).$$

\*  $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$ , car A est un point fixe dans  $\mathcal{R}_0$ .

\*  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \dot{\theta}\vec{x} + \dot{\psi}\vec{z}_0$ ,  $\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = a\vec{x} + a\vec{z}$ . Décomposons le vecteur  $\vec{z}$  dans la base de  $\mathcal{R}_1(O_0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ . Pour cela, il est utile de se référer à la figure suivante qui décrit la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $(A, \vec{x})$ . Il vient alors  $\vec{z} = -\sin(\theta)\vec{y} + \cos(\theta)\vec{z}_0$ .

D'où  $\boxed{\overline{AP} = a\vec{x} - a\sin(\theta)\vec{y} + a\cos(\theta)\vec{z}_0}$ .



$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overline{AP} = (\dot{\theta}\vec{x} + \dot{\psi}\vec{z}_0) \wedge [a\vec{x} - a\sin(\theta)\vec{y} + a\cos(\theta)\vec{z}_0] = -a\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{z}_0 - a\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{y} + a\dot{\psi}\vec{y} + a\dot{\psi}\sin(\theta)\vec{x}$$

$$\text{soit : } \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overline{AP} = a\dot{\psi}\sin(\theta)\vec{x} + [a\dot{\psi} - a\dot{\theta}\cos(\theta)]\vec{y} - a\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{z}_0$$

$$\text{D'où : } \boxed{\vec{V}(P/\mathcal{R}_0) = a\dot{\psi}\sin(\theta)\vec{x} + [a\dot{\psi} - a\dot{\theta}\cos(\theta)]\vec{y} - a\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{z}_0}.$$

### 3) Calcul du vecteur accélération instantanée $\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_0)$ .

Plusieurs méthodes sont possibles, il est cependant plus intéressant d'utiliser la formule de dérivation composée. On a alors :

$$\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(P/\mathcal{R}_0).$$

$$* \left. \frac{d\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \left. \frac{d\{a\dot{\psi}\sin(\theta)\vec{x} + [a\dot{\psi} - a\dot{\theta}\cos(\theta)]\vec{y} - a\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{z}_0\}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1},$$

$$\left. \frac{d\vec{V}(P/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = [a\ddot{\psi}\sin(\theta) + a\dot{\theta}\dot{\psi}\cos(\theta)]\vec{x} + [a\ddot{\psi} - a\ddot{\theta}\cos(\theta) + a\dot{\theta}^2\sin(\theta)]\vec{y} + [-a\ddot{\theta}\sin(\theta) - a\dot{\theta}^2\cos(\theta)]\vec{z}_0$$

$$\star \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(P / \mathcal{R}_0) = (\dot{\psi} \vec{z}_0) \wedge \left\{ a\dot{\psi} \sin(\theta) \vec{x} + \left[ a\ddot{\psi} - a\dot{\theta} \cos(\theta) \right] \vec{y} - a\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{z}_0 \right\}.$$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(P / \mathcal{R}_0) = \left[ -a\dot{\psi}^2 + a\dot{\theta}\dot{\psi} \cos(\theta) \right] \vec{x} + a\dot{\psi}^2 \sin(\theta) \vec{y}$$

$$\text{D'où } \vec{\gamma}(P / \mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} a\dot{\psi} \sin(\theta) + a\dot{\theta}\dot{\psi} \cos(\theta) \\ a\ddot{\psi} - a\ddot{\theta} \cos(\theta) + a\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ -a\ddot{\theta} \sin(\theta) - a\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1} + \begin{bmatrix} -a\dot{\psi}^2 + a\dot{\theta}\dot{\psi} \cos(\theta) \\ a\dot{\psi}^2 \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}, \text{ soit}$$

$$\vec{\gamma}(P / \mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} -a\dot{\psi}^2 + a\dot{\psi} \sin(\theta) + 2a\dot{\theta}\dot{\psi} \cos(\theta) \\ a\ddot{\psi} - a\ddot{\theta} \cos(\theta) + a(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) \sin(\theta) \\ -a\ddot{\theta} \sin(\theta) - a\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_1}.$$

#### Exercice 4:

Les repères qui interviennent sont :

- $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  repère fixe orthonormé et direct,
- $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$  repère lié au cerceau obtenu à partir de  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par la rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$ ,
- $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{x}_2 = \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  repère lié à la barre et dont la base est obtenue à partir de celle de  $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par la rotation d'angle  $\beta$  autour de l'axe  $\vec{x}_1$ .

Pour répondre aux questions 1), 2), il suffit en fait de prendre un point P représentant l'une des deux extrémités de la barre et de calculer sa vitesse relative par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , ainsi que sa vitesse d'entraînement dans le mouvement relatif de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , avant de déduire comme cas particuliers les vitesses pour  $P = C$  et  $P = D$ , respectivement.

Il est utile avant de commencer les calculs de faire les deux représentations suivantes des rotations, figure 1.

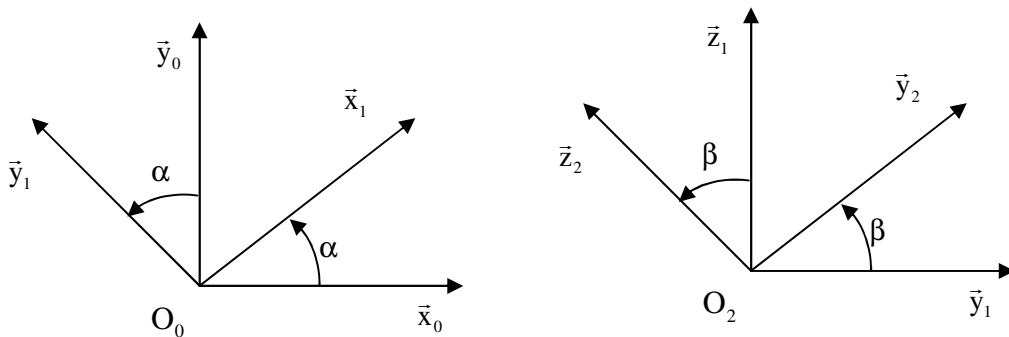


Figure 1

**1) Calcul des vitesses des extrémités C et D du solide  $S_2$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$**

On calcule la vitesse relative de P :  $\vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$

On a :  $\vec{V}(P/\mathcal{R}_1) = \frac{d\vec{O_0P}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1}$ ,  $\vec{O_0P} = \vec{O_0O_2} + \vec{O_2P} = \vec{O_0O_2} + c\vec{y}_2$ , avec  $c = -a$  si  $P = C$  et  $c = a$  si

$P = D$ .

Pour exprimer  $\vec{O_0O_2}$ , on fait un peu de géométrie. D'après la figure 2, par application du théorème de Pythagore, il vient:  $x^2 + a^2 = 2a^2$ , d'où  $x = a$  et  $\vec{O_0O_2} = a\vec{z}_2$ .

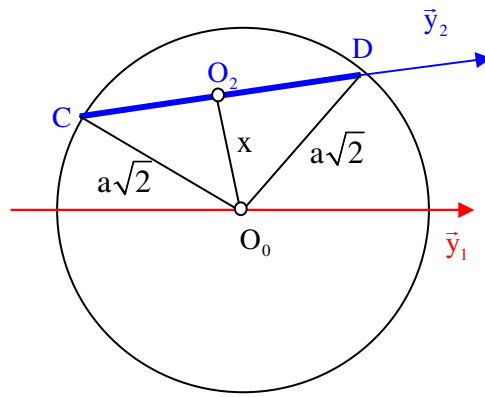


Figure 2

On obtient finalement :  $\vec{O_0P} = c\vec{y}_2 + a\vec{z}_2$ , où  $a$  et  $c$  sont des constantes.

L'expression de  $\vec{O_0P}$  montre que, pour calculer la vitesse de P dans  $\mathcal{R}_1$ , il convient mieux d'utiliser la formule de dérivation composée entre  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_1$ , car les composantes de  $\vec{O_0P}$  sont données dans  $\mathcal{R}_2$ . Il vient alors:

$$\vec{V}(P/\mathcal{R}_1) = \frac{d\vec{O_0P}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} = \frac{d\vec{O_0P}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{O_0P}.$$

$$\star \frac{d\vec{O_0P}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} = \frac{d(c\vec{y}_2 + a\vec{z}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} = \vec{0}.$$

$$\star \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{O_0P} = (\dot{\beta}\vec{x}_2) \wedge (c\vec{y}_2 + a\vec{z}_2) = -a\dot{\beta}\vec{y}_2 + c\dot{\beta}\vec{z}_2.$$

$$\text{D'où : } \vec{V}(P/\mathcal{R}_1) = -a\dot{\beta}\vec{y}_2 + c\dot{\beta}\vec{z}_2.$$

Il suffit maintenant d'exprimer cette vitesse dans  $\mathcal{R}_1$ . En consultant la figure 1, il vient :  $\vec{y}_2 = \cos(\beta)\vec{y}_1 + \sin(\beta)\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2 = -\sin(\beta)\vec{y}_1 + \cos(\beta)\vec{z}_1$ . En reportant  $\vec{y}_2$  et  $\vec{z}_2$  dans  $\vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$ , il vient:  $\vec{V}(P/\mathcal{R}_1) = -a\dot{\beta}[\cos(\beta)\vec{y}_1 + \sin(\beta)\vec{z}_1] + c\dot{\beta}[-\sin(\beta)\vec{y}_1 + \cos(\beta)\vec{z}_1]$ , soit

$$\vec{V}(P/\mathcal{R}_1) = -\dot{\beta}[a\cos(\beta) + c\sin(\beta)]\vec{y}_1 + \dot{\beta}[-a\sin(\beta) + c\cos(\beta)]\vec{z}_1.$$

D'où  $\vec{V}(C/\mathcal{R}_1) = -a\dot{\beta}[\cos(\beta) - \sin(\beta)]\vec{y}_1 - a\dot{\beta}[\sin(\beta) + \cos(\beta)]\vec{z}_1$  et

$$\vec{V}(D/\mathcal{R}_1) = -a\dot{\beta}[\cos(\beta) + \sin(\beta)]\vec{y}_1 + a\dot{\beta}[\cos(\beta) - \sin(\beta)]\vec{z}_1.$$

## 2) \* Calcul des vitesses d'entraînement de C et D pour le mouvement relatif de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ .

On calcul la vitesse d'entraînement de P :  $\vec{V}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ .

Le champ des vitesses de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est un torseur, d'où :

$$\vec{V}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_0 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0P}.$$

$$* \vec{V}(O_0 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{0}.$$

$$* \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0P} = (\dot{\alpha}\vec{z}_1) \wedge (c\vec{y}_2 + a\vec{z}_2). \quad \text{Avec} \quad \vec{y}_2 = \cos(\beta)\vec{y}_1 + \sin(\beta)\vec{z}_1 \quad \text{et}$$

$$\vec{z}_2 = -\sin(\beta)\vec{y}_1 + \cos(\beta)\vec{z}_1, \text{ il vient } c\vec{y}_2 + a\vec{z}_2 = c[\cos(\beta)\vec{y}_1 + \sin(\beta)\vec{z}_1] + a[-\sin(\beta)\vec{y}_1 + \cos(\beta)\vec{z}_1], \text{ soit}$$

$$c\vec{y}_2 + a\vec{z}_2 = [c\cos(\beta) - a\sin(\beta)]\vec{y}_1 + [c\sin(\beta) + a\cos(\beta)]\vec{z}_1.$$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0P} = (\dot{\alpha}\vec{z}_1) \wedge \{[c\cos(\beta) - a\sin(\beta)]\vec{y}_1 + [c\sin(\beta) + a\cos(\beta)]\vec{z}_1\}, \text{ soit}$$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0P} = \dot{\alpha}[a\sin(\beta) - c\cos(\beta)]\vec{x}_1. \text{ Ainsi } \vec{V}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\alpha}[a\sin(\beta) - c\cos(\beta)]\vec{x}_1.$$

$$\text{D'où } \vec{V}(C \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\alpha}a[\sin(\beta) + \cos(\beta)]\vec{x}_1 \text{ et } \vec{V}(D \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\alpha}a[\sin(\beta) - \cos(\beta)]\vec{x}_1.$$

## \* Calcul des vitesses absolues des extrémités C et D du solide $S_2$ (par rapport $\mathcal{R}_0$ )

Par composition des vitesses, il vient :

$$\vec{V}(C/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(C/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(C \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0), \text{ et } \vec{V}(D/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(D/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(D \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \text{ ce qui donne :}$$

$$\vec{V}(C/\mathcal{R}_0) = \dot{\alpha}a[\sin(\beta) + \cos(\beta)]\vec{x}_1 - a\dot{\beta}[\cos(\beta) - \sin(\beta)]\vec{y}_1 - a\dot{\beta}[\sin(\beta) + \cos(\beta)]\vec{z}_1,$$

$$\text{et } \vec{V}(D/\mathcal{R}_0) = \dot{\alpha}a[\sin(\beta) - \cos(\beta)]\vec{x}_1 - a\dot{\beta}[\cos(\beta) + \sin(\beta)]\vec{y}_1 + a\dot{\beta}[\cos(\beta) - \sin(\beta)]\vec{z}_1.$$

## 3) Vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}_0$ (par projection dans $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ )

On a :  $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$ , mais  $\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O_2} + \overrightarrow{O_2M} = y\vec{y}_2 + a\vec{z}_2$ . On peut alors appliquer la

formule de dérivation composée mettant en jeu les repères  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_0$  sous la forme

$$\text{suivante : } \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0M}.$$

$$* \left. \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} = \left. \frac{d(y\vec{y}_2 + a\vec{z}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} = \dot{y}\vec{y}_2.$$

$$* \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0M} = (\dot{\beta}\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\vec{z}_1) \wedge (y\vec{y}_2 + a\vec{z}_2). \text{ Exprimons le vecteur } \vec{z}_1 \text{ dans la base de } \mathcal{R}_2.$$

D'après la figure 1, on a :  $\vec{z}_1 = \sin(\beta)\vec{y}_2 + \cos(\beta)\vec{z}_2$ .

Il vient alors :  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_0M} = (\dot{\beta}\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\cos(\beta)\vec{z}_2) \wedge (y\vec{y}_2 + a\vec{z}_2)$ , ce qui donne :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_0 M} = [a\dot{\alpha} \sin(\beta) - y\dot{\alpha} \cos(\beta)] \vec{x}_2 - a\dot{\beta} \vec{y}_2 + y\dot{\beta} \vec{z}_2.$$

D'où

$$\vec{V}(M / \mathcal{R}_0) = [a\dot{\alpha} \sin(\beta) - y\dot{\alpha} \cos(\beta)] \vec{x}_2 + [\dot{y} - a\dot{\beta}] \vec{y}_2 + y\dot{\beta} \vec{z}_2.$$

#### 4) Calcul des accélérations relative, de Coriolis et d'entraînement, du mobile M (repère relatif $\mathcal{R}_2$ et repère absolu $\mathcal{R}_0$ ).

\* Accélération relative

On a :  $\vec{V}(M / \mathcal{R}_2) = \frac{d\vec{O_2 M}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} = \dot{y} \vec{y}_2$ , d'où :  $\vec{\gamma}(M / \mathcal{R}_2) = \frac{d\vec{V}(M / \mathcal{R}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} = \ddot{y} \vec{y}_2$ , soit

$$\vec{\gamma}(M / \mathcal{R}_2) = \ddot{y} \vec{y}_2$$

\* Accélération de Coriolis

On a :  $\vec{\gamma}_c(M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M / \mathcal{R}_2)$ . D'où

$$\vec{\gamma}_c(M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) = 2(\dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \cos(\beta) \vec{z}_2) \wedge (\dot{y} \vec{y}_2), \text{ soit } \vec{\gamma}_c(M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) = -2\dot{y}\dot{\alpha} \cos(\beta) \vec{x}_2 + 2\dot{y}\dot{\beta} \vec{z}_2$$

ou encore  $\vec{\gamma}_c(M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} -2\dot{y}\dot{\alpha} \cos(\beta) \\ 0 \\ 2\dot{y}\dot{\beta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$ .

\* Accélération d'entraînement

On utilise la propriété caractéristique du champ des accélérations d'un solide indéformable, soit en prenant  $O_2 \in \mathcal{R}_2$  :

$$\vec{\gamma}(M \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) = \vec{\gamma}(O_2 \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) + \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} \wedge \vec{O_0 M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_0 M}).$$

\*  $\vec{O_0 O_2} = a \vec{z}_2 \Rightarrow \frac{d\vec{O_0 O_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = a \frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = a \left( \frac{d\vec{z}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) \wedge \vec{z}_2 \right)$ , ce qui donne

$$\frac{d\vec{O_0 O_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = a(\dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \cos(\beta) \vec{z}_2) \wedge \vec{z}_2, \text{ c'est-à-dire } \frac{d\vec{O_0 O_2}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = a\dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{x}_2 - a\dot{\beta} \vec{y}_2.$$

$$\frac{d^2 \vec{O_0 O_2}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d(a\dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{x}_2 - a\dot{\beta} \vec{y}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d(a\dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{x}_2 - a\dot{\beta} \vec{y}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) \wedge [a\dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{x}_2 - a\dot{\beta} \vec{y}_2].$$

\*  $\frac{d(a\dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{x}_2 - a\dot{\beta} \vec{y}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} = [a\ddot{\alpha} \sin(\beta) + a\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta)] \vec{x}_2 - a\ddot{\beta} \vec{y}_2.$

\*  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) \wedge [a\dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{x}_2 - a\dot{\beta} \vec{y}_2] = (\dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \cos(\beta) \vec{z}_2) \wedge [a\dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{x}_2 - a\dot{\beta} \vec{y}_2]$ , soit

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) \wedge [a\dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{x}_2 - a\dot{\beta} \vec{y}_2] = a\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta) \vec{x}_2 + a\dot{\alpha}^2 \sin(\beta) \cos(\beta) \vec{y}_2 - [a\dot{\beta}^2 + a\dot{\alpha}^2 \sin^2(\beta)] \vec{z}_2.$$

D'où

$$\vec{\gamma}(O_2 \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) = \frac{d^2 \vec{O_0 O_2}}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} a\ddot{\alpha} \sin(\beta) + 2a\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta) \\ -a\ddot{\beta} + a\dot{\alpha}^2 \sin(\beta) \cos(\beta) \\ -a\dot{\beta}^2 - a\dot{\alpha}^2 \sin^2(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

\*  $\left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)$  , mais  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$  , ce qui donne

$$\left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d(\dot{\beta}\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\cos(\beta)\vec{z}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} = \ddot{\beta}\vec{x}_2 + [\ddot{\alpha}\sin(\beta) + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta)]\vec{y}_2 + [\ddot{\alpha}\cos(\beta) - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta)]\vec{z}_2 .$$

$$\left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \wedge \vec{O_2M} = \left\{ \ddot{\beta}\vec{x}_2 + [\ddot{\alpha}\sin(\beta) + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta)]\vec{y}_2 + [\ddot{\alpha}\cos(\beta) - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta)]\vec{z}_2 \right\} \wedge y\vec{y}_2 , \text{ soit}$$

$$\left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \wedge \vec{O_2M} = [-y\ddot{\alpha}\cos(\beta) + y\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta)]\vec{x}_2 + y\ddot{\beta}\vec{z}_2 = \begin{bmatrix} -y\ddot{\alpha}\cos(\beta) + y\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta) \\ 0 \\ y\ddot{\beta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} .$$

\*  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_2M} = (\dot{\beta}\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\cos(\beta)\vec{z}_2) \wedge (y\vec{y}_2) = -y\dot{\alpha}\cos(\beta)\vec{x}_2 + y\dot{\beta}\vec{z}_2$  , d'où

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_2M}) = \left\{ \dot{\beta}\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\cos(\beta)\vec{z}_2 \right\} \wedge \left\{ -y\dot{\alpha}\cos(\beta)\vec{x}_2 + y\dot{\beta}\vec{z}_2 \right\}$  , soit

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{O_2M}) = \begin{bmatrix} y\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta) \\ -y\dot{\beta}^2 - y\dot{\alpha}\cos^2(\beta) \\ y\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

En associant les trois contributions à l'accélération d'entraînement, il vient :

$$\vec{\gamma}(M \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} a\ddot{\alpha}\sin(\beta) + 2a\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta) \\ -a\ddot{\beta} + a\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) \\ -a\dot{\beta}^2 - a\dot{\alpha}^2\sin^2(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} + \begin{bmatrix} -y\ddot{\alpha}\cos(\beta) + y\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta) \\ 0 \\ y\ddot{\beta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} + \begin{bmatrix} y\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta) \\ -y\dot{\beta}^2 - y\dot{\alpha}\cos^2(\beta) \\ y\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

soit

$$\vec{\gamma}(M \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}[a\sin(\beta) - y\cos(\beta)] + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}[a\cos(\beta) + y\sin(\beta)] \\ -a\ddot{\beta} - y\dot{\beta}^2 + a\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) - y\dot{\alpha}\cos^2(\beta) \\ y\ddot{\beta} - a\dot{\beta}^2 - a\dot{\alpha}^2\sin^2(\beta) + y\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} .$$

### \* Accélération absolue

Par composition des accélérations, on a :

$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_2) + \vec{\gamma}(M \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) + \vec{\gamma}_c(M \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)$  . D'où

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{y} \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} + \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}[a\sin(\beta) - y\cos(\beta)] + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}[a\cos(\beta) + y\sin(\beta)] \\ -a\ddot{\beta} - y\dot{\beta}^2 + a\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) - y\dot{\alpha}\cos^2(\beta) \\ y\ddot{\beta} - a\dot{\beta}^2 - a\dot{\alpha}^2\sin^2(\beta) + y\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} + \begin{bmatrix} -2y\dot{\alpha}\cos(\beta) \\ 0 \\ 2y\dot{\beta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} , \text{ soit}$$

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}[a\sin(\beta) - y\cos(\beta)] + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}[a\cos(\beta) + y\sin(\beta)] - 2y\dot{\alpha}\cos(\beta) \\ \ddot{y} - a\ddot{\beta} - y\dot{\beta}^2 + a\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) - y\dot{\alpha}^2\cos^2(\beta) \\ y\ddot{\beta} + 2y\dot{\beta} - a\dot{\beta}^2 - a\dot{\alpha}^2\sin^2(\beta) + y\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} .$$

### 4) Accélération absolue par la méthode de dérivation vectorielle composée

On a :  $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$  . La vitesse

$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$  a été calculée dans la deuxième question, et on avait trouvé :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = [a\dot{\alpha}\sin(\beta) - y\dot{\alpha}\cos(\beta)]\vec{x}_2 + [\dot{y} - a\dot{\beta}]\vec{y}_2 + y\dot{\beta}\vec{z}_2 = \begin{bmatrix} a\dot{\alpha}\sin(\beta) - y\dot{\alpha}\cos(\beta) \\ \dot{y} - a\dot{\beta} \\ y\dot{\beta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

$$\star \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a\dot{\alpha}\sin(\beta) - y\dot{\alpha}\cos(\beta) \\ \dot{y} - a\dot{\beta} \\ y\dot{\beta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}, \text{ soit}$$

$$\left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}[a\sin(\beta) - y\cos(\beta)] + \dot{\alpha}\dot{\beta}[a\cos(\beta) + y\sin(\beta)] - \dot{y}\dot{\alpha}\cos(\beta) \\ \ddot{y} - a\ddot{\beta} \\ \dot{y}\dot{\beta} + y\ddot{\beta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

$$\star \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin(\beta) \\ \dot{\alpha}\cos(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} \wedge \begin{bmatrix} a\dot{\alpha}\sin(\beta) - y\dot{\alpha}\cos(\beta) \\ \dot{y} - a\dot{\beta} \\ y\dot{\beta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}, \text{ soit}$$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} y\dot{\beta}\dot{\alpha}\sin(\beta) - \dot{y}\dot{\alpha}\cos(\beta) + a\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta) \\ -y\dot{\beta}^2 + a\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) - y\dot{\alpha}^2\cos^2(\beta) \\ \dot{y}\dot{\beta} - a\dot{\beta}^2 - a\dot{\alpha}^2\sin^2(\beta) + y\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

D'où

$$\bar{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}[a\sin(\beta) - y\cos(\beta)] + \dot{\alpha}\dot{\beta}[a\cos(\beta) + y\sin(\beta)] - \dot{y}\dot{\alpha}\cos(\beta) \\ \ddot{y} - a\ddot{\beta} \\ \dot{y}\dot{\beta} + y\ddot{\beta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2} + \begin{bmatrix} y\dot{\beta}\dot{\alpha}\sin(\beta) - \dot{y}\dot{\alpha}\cos(\beta) + a\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta) \\ -y\dot{\beta}^2 + a\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) - y\dot{\alpha}^2\cos^2(\beta) \\ \dot{y}\dot{\beta} - a\dot{\beta}^2 - a\dot{\alpha}^2\sin^2(\beta) + y\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

soit :

$$\bar{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}[a\sin(\beta) - y\cos(\beta)] + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}[a\cos(\beta) + y\sin(\beta)] - 2\dot{y}\dot{\alpha}\cos(\beta) \\ \ddot{y} - a\ddot{\beta} - y\dot{\beta}^2 + a\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) - y\dot{\alpha}^2\cos^2(\beta) \\ y\ddot{\beta} + 2\dot{y}\dot{\beta} - a\dot{\beta}^2 - a\dot{\alpha}^2\sin^2(\beta) + y\dot{\alpha}^2\sin(\beta)\cos(\beta) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_2}.$$

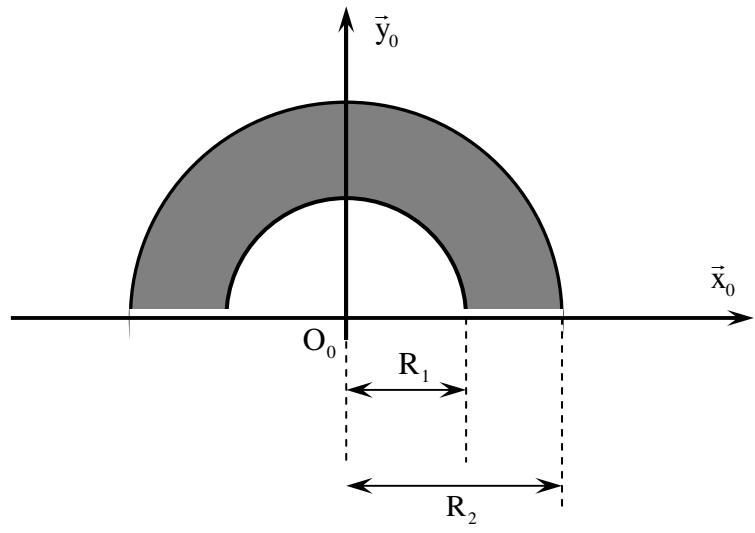
**Remarque :**

La méthode de calcul de l'accélération absolue de la question 4 permet d'effectuer un calcul plus rapide et plus simple. C'est une méthode qui s'adapte bien au problème lorsque le solide en mouvement n'admet pas de point particulier dont le calcul de l'accélération est évident. Dans le présent cas ce sont les calculs de  $\bar{\gamma}(O_2 \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)$  et de l'accélération d'entraînement  $\bar{\gamma}(M \in \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0)$  qui alourdissent l'application du théorème de composition des accélérations. Retenez donc bien l'utilité de **la formule de dérivation composée**.

**Module Physique 6**  
**Mécanique du solide indéformable**  
**Série N°3**

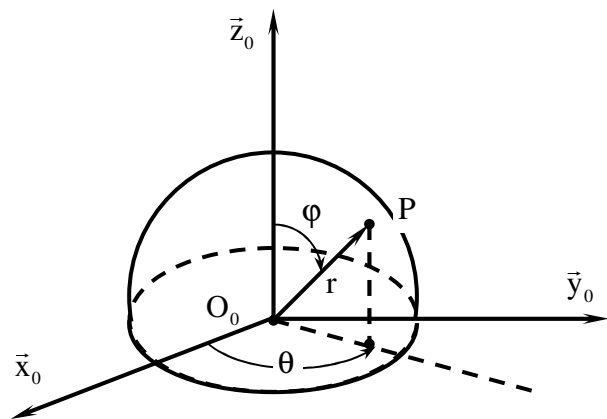
**Exercice 1:**

Déterminer dans le repère  $\mathcal{R}(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et de la masse  $m$ , les coordonnées  $x_G$ ,  $y_G$  et  $z_G$  du centre d'inertie  $G$  d'un demi-disque creux  $D_{1/2}(O_0, R_2 - R_1)$  de centre  $O_0$ , de rayon interne  $R_1$ , de rayon externe  $R_2$  et de densité surfacique  $\sigma$ .



**Exercice 2:**

1. Déterminer en fonction de  $R$  et de la masse  $m$ , dans le repère  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , les coordonnées  $x_G$ ,  $y_G$ ,  $z_G$  du centre d'inertie  $G$  d'une demi-sphère creuse homogène  $S_{1/2}(O_0, R)$  de centre  $O_0$  de rayon interne  $R$ , et de densité surfacique  $\sigma$ .

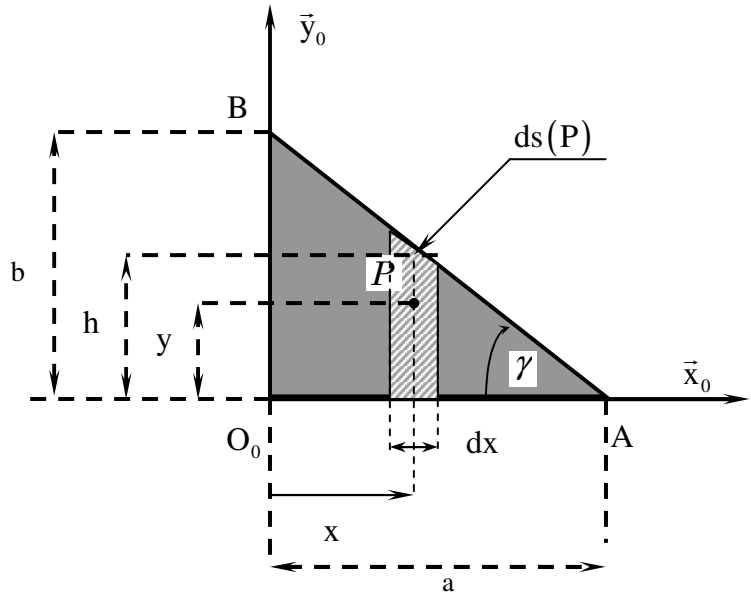


2. Reprendre la même question pour une demi-sphère pleine  $S_{1/2}(O_0, R)$  de masse volumique  $\rho$ .
3. Déterminer dans la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  attachée au repère  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  les matrices d'inertie en  $O_0$ , et en son centre de masse  $G$ , en fonction de la masse  $m$  et du rayon  $R$  d'une demi-sphère creuse.

### Exercice 3:

Calculer, dans  $\mathcal{R}(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , les coordonnées  $x_G$ ,  $y_G$  et  $z_G$  du centre d'inertie  $G$  d'une plaque triangulaire  $T = (O_0AB)$  homogène, plane, rectangle en  $O_0$  et de masse  $m$ .

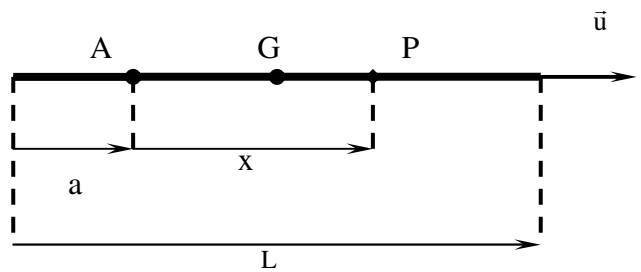
On posera  $\overrightarrow{O_0A} = a\vec{x}_0$  et  $\overrightarrow{O_0B} = b\vec{y}_0$ .



### Exercice 4:

Calculer le moment d'inertie  $I(T/A) = \int_{P \in T} \overrightarrow{AP}^2 dm(P)$  par rapport au

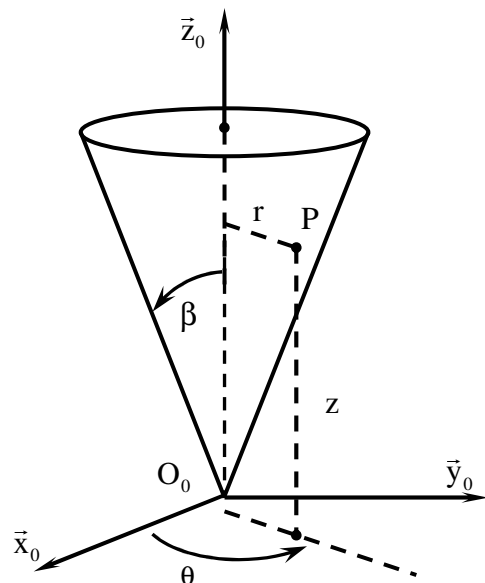
point  $A$  d'une tige  $T$  rectiligne, homogène, de masse  $m$ , de longueur  $L$ , de densité linéique  $\lambda$  et de centre de masse  $G$ . Le point  $A$  est supposé à la distance  $a$  de l'une des extrémités de la tige. Retrouver les différents cas suivant que  $A$  est à l'extrémité de la tige ou coïncidant avec son centre de masse.



### Exercice 5:

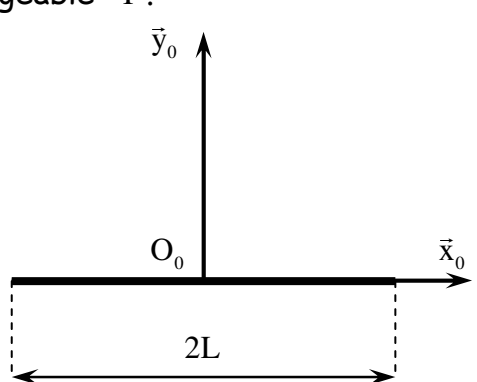
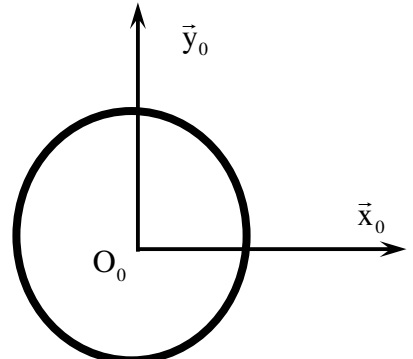
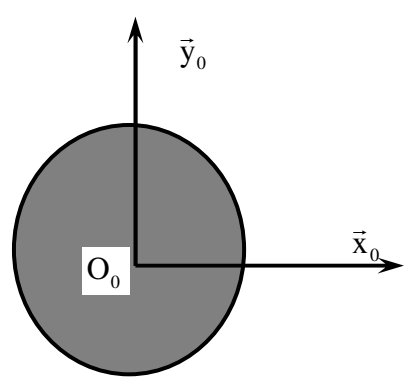
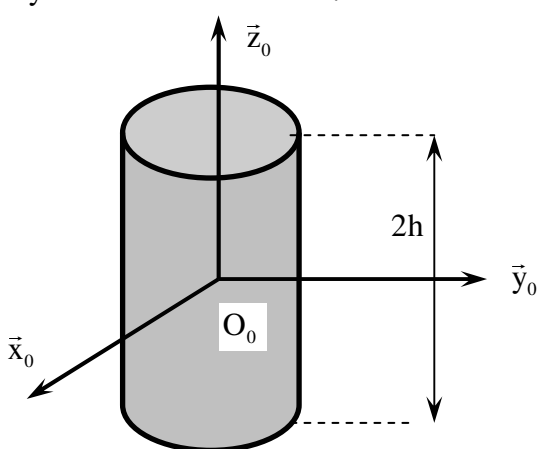
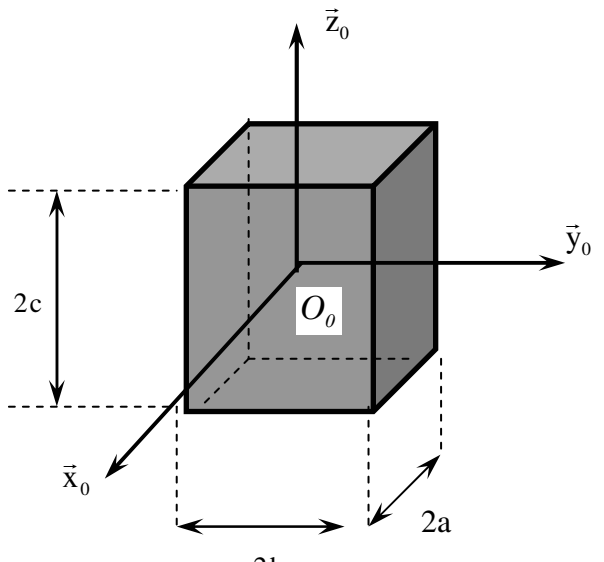
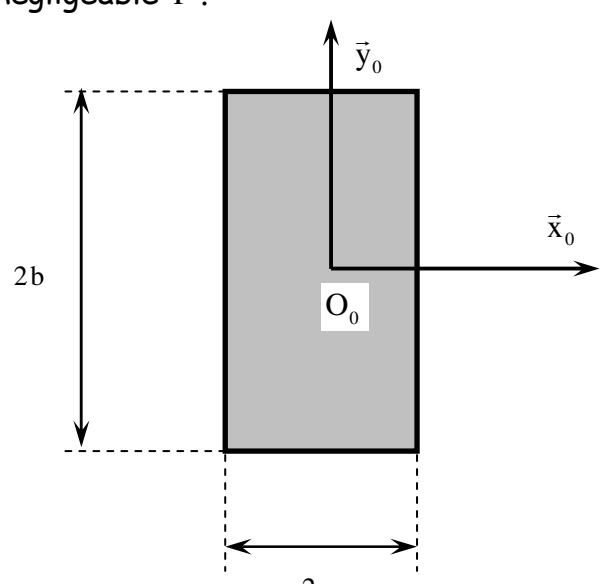
1. Déterminer dans le repère  $\mathcal{R}(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  les coordonnées  $x_G$ ,  $y_G$ ,  $z_G$  du centre d'inertie  $G$  d'un cône creux, homogène, de densité surfacique  $\sigma$ , de masse totale  $m$  de hauteur  $H$  et de rayon de la base  $R$ .

2. Reprendre la même question pour un cône plein de masse volumique  $\rho$ .



### Exercice 6:

Déterminer dans la base  $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  attachée au repère de référence  $\mathcal{R}(O_0, \mathcal{B}_0)$ , la matrice d'inertie en  $O_0$ , ( $O_0 \equiv G$ ) en fonction de la masse  $m$  et des différentes données de chacun des solides supposés homogènes suivants :

<p>1. Tige rectiligne de section négligeable <math>T</math>.</p> 	<p>2. Cerceau <math>C(O_0, R)</math>.</p> 
<p>3. Disque <math>D(O_0, R)</math>.</p> 	<p>4. Cylindre plein de révolution <math>C</math> : <math>x^2 + y^2 = R^2</math> et <math>-h \leq z \leq h</math>.</p> 
<p>5. Parallélépipède droit plein <math>P</math> : <math>-a \leq x \leq a</math> ; <math>-b \leq y \leq b</math> ; <math>-c \leq z \leq c</math>.</p> 	<p>6. Plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable <math>P</math>.</p> 

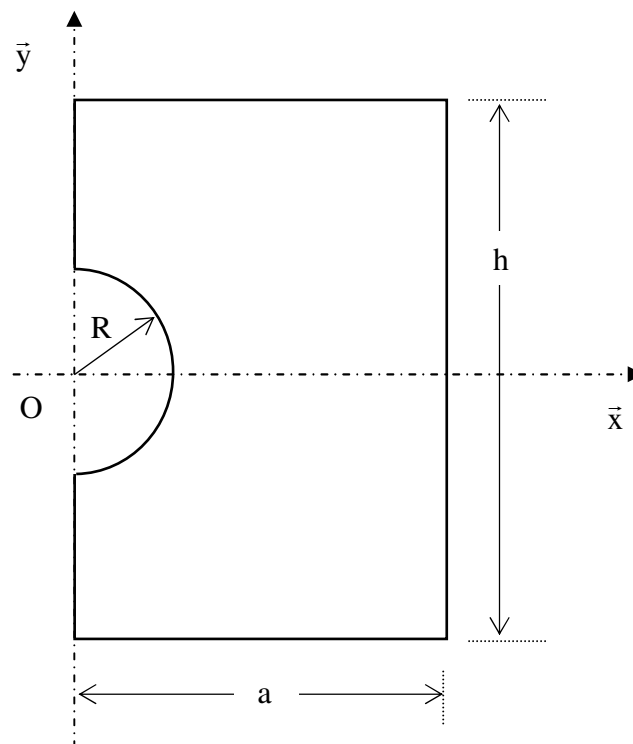
### Exercice 7:

1) Calculer la position du centre d'inertie  $G$  de la plaque de côtés  $a$  et  $h$  (cf. figure ci-dessous), évidée sur le côté  $h$  (au centre de celui-ci) d'un demi cercle de rayon  $R$ .

2) Calculer pour ce solide les moments d'inertie autour de l'axe  $Ox$ , puis autour de  $Oy$ .

On supposera négligeable l'épaisseur de la plaque devant ses autres dimensions.

Note : Pour cet exercice, on aura intérêt à utiliser le principe de superposition, avec une masse surfacique  $+\sigma$  pour la plaque, superposée avec une masse surfacique  $-\sigma$  pour le trou.



**Module Physique 6**  
**TD de mécanique du solide indéformable**  
**Corrigé de la série N°3**

**Exercice 1 :**

\* Le demi-disque creux  $D_{1/2}(O_0, R_2 - R_1)$  est contenu dans la plan  $x_0O_0y_0$ , donc  $\boxed{z_G = 0}$ .

\* Le demi-disque creux  $D_{1/2}(O_0, R_2 - R_1)$  est symétrique par rapport à l'axe  $O_0y_0$ , donc  $G$  appartient à cet axe et  $\boxed{x_G = 0}$ .

\* Calculons  $y_G$

On a :  $y_G = \frac{\iint_{D_{1/2}} y \, dm}{\iint_{D_{1/2}} dm}$ . Puisque le demi-disque est homogène, de densité surfacique  $\sigma$  :

$dm = \sigma dS$ . Vue la symétrie polaire du demi-disque, le choix des coordonnées polaires est plus commode, d'où  $dS = r \, dr \, d\theta$ .

\* L'intégrale de masse s'écrit :  $m = \iint_{D_{1/2}} dm = \sigma \iint_{D_{1/2}} r \, dr \, d\theta$ . Puisque les domaines d'intégration par rapport aux variables  $r$  et  $\theta$  sont indépendants, l'intégrale de surface est égale au produit de deux intégrales simples et  $m = \sigma \left( \int_{R_1}^{R_2} r \, dr \right) \left( \int_0^\pi d\theta \right) = \sigma \pi \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{R_1}^{R_2}$ , soit

$$m = \frac{\sigma \pi}{2} (R_2^2 - R_1^2).$$

\* En remarquant que  $y = r \sin(\theta)$ , l'intégrale au numérateur dans l'expression de  $y_G$  s'écrit

$$\iint_{D_{1/2}} y \, dm = \sigma \iint_{D_{1/2}} r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta. \text{ D'où } \iint_{D_{1/2}} y \, dm = \sigma \left( \int_{R_1}^{R_2} r^2 \, dr \right) \left( \int_0^\pi \sin(\theta) \, d\theta \right) = \sigma \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_{R_1}^{R_2} [-\cos(\theta)]_0^\pi,$$

$$\text{soit } \iint_{D_{1/2}} y \, dm = \frac{2\sigma}{3} (R_2^3 - R_1^3).$$

$$y_G = \frac{\iint_{D_{1/2}} y \, dm}{\iint_{D_{1/2}} dm} = \frac{\frac{2\sigma}{3} (R_2^3 - R_1^3)}{\frac{\sigma \pi}{2} (R_2^2 - R_1^2)} = \frac{4}{3\pi} \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)}, \text{ soit finalement: } \boxed{y_G = \frac{4}{3\pi} \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{R_1 + R_2}}.$$

**Exercice 2 :**

1) La demi-sphère creuse  $S_{1/2}(O_0, R)$  est symétrique par rapport aux plans  $y_0O_0z_0$  et  $x_0O_0z_0$ , donc le centre d'inertie appartient à ces deux plans, donc il appartient à leur intersection. D'où  $\boxed{x_G = 0}$  et  $\boxed{y_G = 0}$ .

Calculons :  $z_G = \frac{\iint_{S_{1/2}} z \, dm}{\iint_{S_{1/2}} dm}$

\* La demi-sphère creuse est homogène, donc:  $m = \iint_{S_{1/2}} dm = \sigma \iint_{S_{1/2}} dS$ . La surface étant de géométrie sphérique, il convient mieux de travailler avec le système des coordonnées sphériques. Du fait que avec  $r=R$ , il vient alors:  $dS = R^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi$  et  $m = \sigma R^2 \iint_{S_{1/2}} \sin(\varphi) d\theta d\varphi$ . Les domaines d'intégration par rapport aux variables  $\theta$  et  $\varphi$  sont indépendants, d'où  $m = \sigma R^2 \iint_{S_{1/2}} \sin(\varphi) d\theta d\varphi = \sigma R^2 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) d\varphi \right)$ , soit après calcul  $m = 2\pi\sigma R^2$ .

\* Pour le calcul de l'intégrale au numérateur de  $z_G$ , on utilise  $z = R \cos(\varphi)$ , d'où  $\iint_{S_{1/2}} z \, dm = \sigma R^3 \iint_{S_{1/2}} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\theta d\varphi = \sigma R^3 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \right)$ . Soit  $\iint_{S_{1/2}} z \, dm = \pi\sigma R^3$ .

D'où  $z_G = \frac{\iint_{S_{1/2}} z \, dm}{\iint_{S_{1/2}} dm} = \frac{\pi\sigma R^3}{2\pi\sigma R^2}$ , soit  $\boxed{z_G = \frac{R}{2}}$ .

2) Par raison de symétrie, on a :  $x_G = 0$  et  $y_G = 0$ .

Calculons  $z_G = \frac{\iiint_{S_{1/2}} z \, dm}{\iiint_{S_{1/2}} dm}$ .

\* La demi-sphère pleine est homogène, d'où  $dm = \rho dV$  où  $\rho$  est la densité volumique. La géométrie sphérique de la demi-sphère pleine nous invite à considérer les coordonnées sphériques et l'expression de l'élément de volume associée à ce système de coordonnées, soit  $dV = r^2 \sin(\varphi) dr d\theta d\varphi$ . On obtient alors :

$m = \iiint_{S_{1/2}} dm = \rho \iiint_{S_{1/2}} dV = \rho \iiint_{S_{1/2}} r^2 \sin(\varphi) dr d\theta d\varphi$ , mais les domaines d'intégration sont indépendants par rapport aux trois variables  $(r, \theta, \varphi)$ , d'où l'intégrale de volume qui se transforme en le produit de trois intégrales simples, c'est-à-dire

$m = \rho \iiint_{S_{1/2}} r^2 \sin(\varphi) dr d\theta d\varphi = \rho \left( \int_0^R r^2 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) d\varphi \right) = \rho \frac{R^3}{3} 2\pi$ , soit  $m = \frac{2\pi\rho R^3}{3}$ .

\* Avec  $z = r \cos(\varphi)$ , il vient :  $\iiint_{S_{1/2}} z \, dm = \rho \left( \int_0^R r^3 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \right)$ , soit

$\iiint_{S_{1/2}} z \, dm = \frac{\rho\pi R^4}{4}$ .

D'où  $z_G = \frac{\iiint_{S_{1/2}} z \, dm}{\iiint_{S_{1/2}} dm} = \frac{\frac{\rho\pi R^4}{4}}{\frac{2\pi\rho R^3}{3}}$ , soit  $\boxed{z_G = \frac{3}{8} R}$ .

3) a) Par raison de symétrie, la matrice d'inertie de la demi-sphère creuse en  $O_0$  est de

la forme suivante :  $J_{B_0}(S_{1/2}, O_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_0}$ .

**\*Calcul du terme A**

On a :  $A = \iint_{S_{1/2}} (y^2 + z^2) dm = \sigma \iint_{S_{1/2}} (y^2 + z^2) dS = \sigma \iint_{S_{1/2}} (y^2 + z^2) R^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi$ , mais

$y = R \sin(\varphi) \cos(\theta)$  et  $z = R \cos(\varphi)$ , d'où  $A = \sigma \iint_{S_{1/2}} (R^2 \sin^2(\varphi) \sin^2(\theta) + R^2 \cos^2(\varphi)) R^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi$

Ce qui donne :  $A = \sigma R^4 \left\{ \iint_{S_{1/2}} \sin^3(\varphi) \sin^2(\theta) d\theta d\varphi + \iint_{S_{1/2}} \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) d\theta d\varphi \right\}$ . En remarquant

que les domaines d'intégration des deux variables sont indépendants, il vient:

$$* \iint_{S_{1/2}} \sin^3(\varphi) \sin^2(\theta) d\theta d\varphi = \left( \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) \left( \int_0^{\pi/2} \sin^3(\varphi) d\varphi \right) = \pi \left( \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) d\varphi - \int_0^{\pi/2} \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \right)$$

$$\text{soit } \iint_{S_{1/2}} \sin^3(\varphi) \sin^2(\theta) d\theta d\varphi = \pi \left[ -\cos(\varphi) + \frac{1}{3} \cos^3(\varphi) \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$* \iint_{S_{1/2}} \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) d\theta d\varphi = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\pi/2} \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \right) = 2\pi \left[ -\frac{1}{3} \cos^3(\varphi) \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{D'où } A = \frac{4\pi\sigma R^4}{3}. \text{ D'après la question 1, } m = 2\pi\sigma R^2, \text{ ce qui donne } \sigma = \frac{m}{2\pi R^2} \text{ et } \boxed{A = \frac{2mR^2}{3}}.$$

**\* Calcul de C**

On a :  $C = \iint_{S_{1/2}} (x^2 + y^2) dm = \sigma \iint_{S_{1/2}} (x^2 + y^2) dS = \sigma \iint_{S_{1/2}} (x^2 + y^2) R^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi$ , mais

$x = R \sin(\varphi) \cos(\theta)$  et  $y = R \sin(\varphi) \sin(\theta)$ , ce qui donne :

$$C = \sigma \iint_{S_{1/2}} R^2 \sin^2(\varphi) R^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi = \sigma R^4 \iint_{S_{1/2}} \sin^3(\varphi) d\theta d\varphi = \sigma R^4 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\pi/2} \sin^3(\varphi) d\varphi \right), \text{ soit}$$

$$C = \frac{4\pi\sigma R^4}{3} \text{ ou encore } \boxed{C = \frac{2mR^2}{3}}. \text{ D'où } J_{B_0}(S_{1/2}, O_0) = \begin{bmatrix} \frac{2mR^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mR^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{3} \end{bmatrix}_{B_0}$$

**b) La matrice d'inertie de  $S_{1/2}$  par rapport à G s'obtient par application du théorème de Huyghens:**

$$\boxed{J_{B_0}(S_{1/2}, O_0) = J_{B_0}(S_{1/2}, G) + J_{B_0}(G, O_0)}$$

avec

$$J_{B_0}(G, O_0) = m \begin{bmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G y_G \\ -x_G z_G & -y_G y_G & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix}_{B_0}. \text{ D'après la question 1 : } x_G = y_G = 0 \text{ et } z_G = \frac{R}{2},$$

$$\text{d'où } J_{B_0}(G, O_0) = m \begin{bmatrix} z_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & z_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{B_0} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{B_0}.$$

On en déduit que :  $J_{B_0}(S_{1/2}, G) = J_{B_0}(S_{1/2}, O_0) - J_{B_0}(G, O_0)$ , soit

$$J_{B_0}(S_{1/2}, G) = \begin{bmatrix} \frac{2mR^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mR^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{3} \end{bmatrix}_{B_0} - \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{B_0} \text{ ou encore}$$

$$J_{B_0}(S_{1/2}, G) = \begin{bmatrix} \frac{5mR^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5mR^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{3} \end{bmatrix}_{B_0}.$$

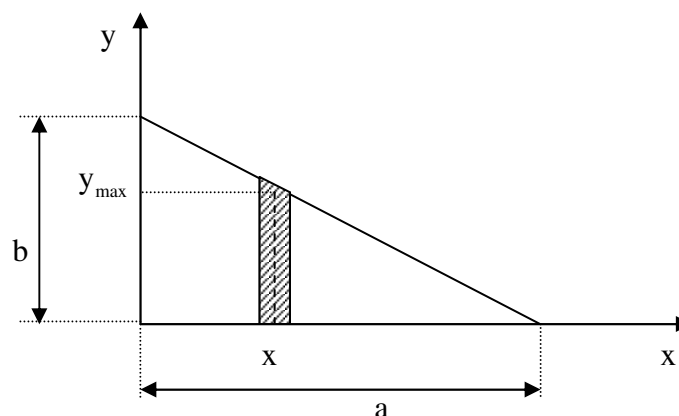
### Exercice 3:

La plaque triangulaire est contenue dans le plan  $x_0O_0y_0$ , d'où  $z_G = 0$ .

Calculons la masse  $m = \iint_T dm$ .

\* La plaque est homogène, donc  $m = \iint_T dm = \sigma \iint_T dS$ . Les coordonnées cartésiennes conviennent dans cet exercice, d'où  $dS = dx dy$  et  $m = \sigma \iint_T dx dy$ . Le problème c'est que les domaines des variables  $x$  et  $y$  ne sont pas indépendants car l'hypoténuse du triangle  $T$  est une droite dont l'équation fait intervenir ces deux variables. Pour pouvoir calculer l'intégrale  $\iint_T dx dy$ , il suffit alors de fixer l'une des deux variables et de commencer l'intégration par rapport à l'autre variable, avant d'opérer la dernière intégration par rapport à la variable fixée. Faisons alors la variable  $x$ . Pour  $x$  fixé le domaine d'intégration de  $y$  est l'intervalle  $[0, y_{\max}]$ . D'après la figure 1, le théorème de Thalès permet d'écrire :  $\frac{y_{\max}}{a-x} = \frac{b}{a}$ . D'où  $y_{\max} = b - \frac{b}{a}x$ .

Figure 1



L'intégrale  $\iint_T dx dy$  s'écrit alors :  $\iint_T dx dy = \int_0^a \left( \int_0^{y_{\max}} dy \right) dx = \int_0^a y_{\max} dx = \int_0^a \left( b - \frac{b}{a} x \right) dx$ , soit

$$\iint_T dx dy = \left[ bx - \frac{b}{2a} x^2 \right]_0^a = \frac{ab}{2}, \text{ ce qui donne le résultat évident : } m = \frac{\sigma ab}{2}.$$

$$* \quad x_G = \frac{\iint_T x dm}{\iint_T dm}, \quad \iint_T x dm = \sigma \iint_T x dx dy = \int_0^a x \left( \int_0^{y_{\max}} dy \right) dx = \int_0^a x (y_{\max}) dx = \int_0^a \left( bx - \frac{b}{a} x^2 \right) dx, \text{ le}$$

calcul de la dernière intégrale donne :  $\iint_T x dm = \frac{\sigma ba^2}{6}$ . D'où  $x_G = \frac{\iint_T x dm}{\iint_T dm} = \frac{\frac{\sigma ba^2}{6}}{\frac{\sigma ab}{2}}$ , soit

$$x_G = \frac{a}{3}.$$

\* Sans faire de calcul, l'expression de  $y_G$  peut être déduite de celle de  $x_G$  en faisant jouer aux variables  $x$  et  $y$  d'une part, et  $a$  et  $b$  d'autre part, des rôles symétriques.

D'où  $y_G = \frac{b}{3}.$

#### Exercice 4:

La tige est homogène de densité linéique  $\lambda$ , d'où  $dm = \lambda dx$ , et par conséquent

$$I(T/A) = \lambda \int_{-a}^{L-a} x^2 dx = \frac{\lambda}{3} [x^3]_{-a}^{L-a} = \frac{\lambda L}{3} (L^2 - 3La + 3a^2). \quad \text{Comme } m = \lambda L, \text{ il vient :}$$

$$I(T/A) = \frac{m}{3} (L^2 - 3La + 3a^2).$$

\* Cas particulier  $a = \frac{L}{2}$  :

$$I(T/G) = \frac{mL^2}{12}$$

\* Cas particulier  $a = 0$  :

$$I(T/a=0) = \frac{mL^2}{3}$$

\* Cas particulier  $a = L$  :

$$I(T/a=L) = \frac{mL^2}{3}$$

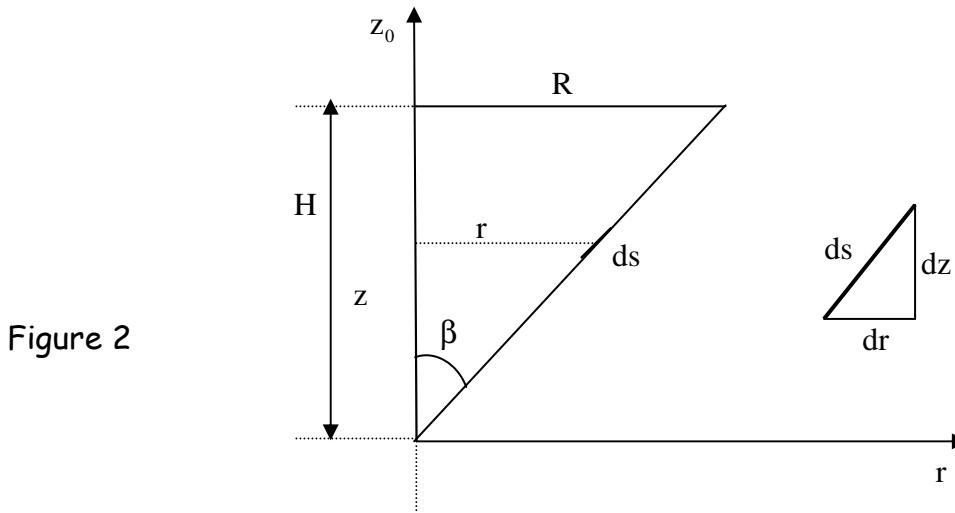
Nous constatons que le moment d'inertie par rapport à G centre d'inertie est minimal et que les deux moments par rapport aux deux extrémités sont égaux à cause de la symétrie.

#### Exercice 5:

1) Le cône est une géométrie qui s'adapte bien aux coordonnées cylindriques, car le système admet un axe de révolution.

Le centre d'inertie appartient nécessairement à l'axe de symétrie, d'où  $x_G = 0$  et  $y_G = 0$ .

Calculons  $z_G = \frac{\iint_C z \, dm}{\iint_C dm}$ . Le cône est homogène, donc  $dm = \sigma dS$ . Le domaine d'intégration par rapport à la variable  $\theta$  ne dépend pas des deux autres variables  $r$  et  $z$ . L'expression de l'élément de surface de révolution  $dS$  s'obtient alors sous la forme suivante :  $dS = 2\pi r \, ds$ , en se référant à une coupe méridienne du cône, figure 2, on a par Pythagore:  $ds = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2}$ .



Avec  $dz = \tan(\beta)dr = \frac{H}{R}dr$ , il vient :  $ds = \sqrt{1 + \frac{H^2}{R^2}}dr = \frac{1}{R}\sqrt{R^2 + H^2}dr$ .

D'où  $dS = \frac{2\pi}{R}\sqrt{R^2 + H^2}r \, dr$ .

\*  $m = \iint_C dm = \sigma \iint_C dS = \sigma \frac{2\pi}{R}\sqrt{R^2 + H^2} \int_0^R r \, dr = \frac{2\pi\sigma}{R}\sqrt{R^2 + H^2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R$ , soit  $m = \pi\sigma R\sqrt{R^2 + H^2}$ .

\*  $\iint_C z \, dm = \sigma \frac{2\pi}{R}\sqrt{R^2 + H^2} \int_0^R z r \, dr = \sigma \frac{2\pi}{R}\sqrt{R^2 + H^2} \int_0^R \frac{H}{R} r^2 \, dr = \frac{2\pi\sigma H}{R^2}\sqrt{R^2 + H^2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R$ , soit

$$\iint_C z \, dm = \frac{2\pi\sigma H R}{3}\sqrt{R^2 + H^2}.$$

D'où  $z_G = \frac{\iint_C z \, dm}{\iint_C dm} = \frac{\frac{2\pi\sigma H R}{3}\sqrt{R^2 + H^2}}{\pi\sigma R\sqrt{R^2 + H^2}}$ , soit  $z_G = \frac{2H}{3}$ .

2) Le système admet un axe de révolution, le centre d'inertie appartient nécessairement à cet axe, d'où :  $x_G = 0$  et  $y_G = 0$ .

Calculons  $z_G = \frac{\iiint_C z \, dm}{\iiint_C dm}$ .

\* Le cône est homogène, donc  $dm = \rho dV$  où  $\rho$  est la masse volumique. L'expression de l'élément de volume en coordonnées cylindriques est :  $dV = r dr d\theta dz$ . Le domaine de la variable  $\theta$  ne dépend pas des deux autres variables  $r$  et  $z$ , donc  $m = \iiint_C dm = \rho \iiint_C r dr d\theta dz = 2\pi \iint_{\text{Méri dien}} r dr dz$ . Pour pouvoir calculer la dernière intégrale de surface dans l'équation précédente, il suffit de fixer  $z$  et de déduire le domaine de  $r$  qui lui est associé. D'après la figure 2,  $r \in [0, r_{\max}]$  avec  $r_{\max} = \frac{R}{H} z$ , d'où

$$m = 2\pi \iint_{\text{Méri dien}} r dr dz = , \text{ ce qui donne}$$

$$m = 2\pi \int_0^H \left( \int_0^{r_{\max}} r dr \right) dz = \frac{2\pi H}{2R} \int_0^H r_{\max}^2 dr = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H z^2 dz = \frac{\pi R^2}{H^2} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^H, \text{ soit } m = \frac{\pi H R^2}{3}.$$

$$* \quad \iiint_C z dm = 2\pi \iint_{\text{Méri dien}} z r dr dz = 2\pi \int_0^H z \left( \int_0^{r_{\max}} r dr \right) dz = \frac{2\pi H}{2R} \int_0^H z r_{\max}^2 dr = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H z^3 dz = \frac{\pi R^2}{H^2} \left[ \frac{z^4}{4} \right]_0^H,$$

$$\text{soit } \iiint_C z dm = \frac{\pi H^2 R^2}{4}.$$

$$\text{On en déduit } z_G = \frac{\frac{\pi H^2 R^2}{4}}{\frac{\pi H R^2}{3}}, \text{ soit } \boxed{z_G = \frac{3}{4} H}.$$

## Exercice 6:

### 1. Tige rectiligne de section négligeable:

La symétrie plus le fait que les dimensions transversales sont négligeables permettent d'écrire la matrice d'inertie de la tige en  $O_0 = G$  dans la base  $B_0$  sous la forme suivante :

$$J_{B_0}(T, O_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{B_0} \text{ avec } B = \int_{-L}^L x^2 dm = \lambda \int_{-L}^L x^2 dx = \lambda \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-L}^L = \frac{2\lambda L^3}{3}. \text{ Mais } \lambda = \frac{m}{2L}, \text{ d'où}$$

$$B = \frac{mL^3}{3}. \text{ Finalement } J_{B_0}(T, O_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{B_0}.$$

### 2. Cerceau:

Les propriétés de symétrie du cerceau montrent que le repère défini par la base  $B_0$  est un repère central d'inertie. Par ailleurs les moments d'inertie par rapport aux axes  $O_0 x_0$  et  $O_0 y_0$  sont identiques.

D'où  $J_{B_0}(C, O_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_0}$ . Il est préférable de travailler avec le système des

cordonnées polaires pour calculer les moments d'inertie  $A$  et  $C$ .

On a :  $A = \int_0^{2\pi} y^2 dm = \lambda \int_0^{2\pi} y^2 R d\theta = \lambda R \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2(\theta) d\theta = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta$ , soit  $A = \pi \lambda R^3$ .

Remarquons que  $C = \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2) dm = 2A$  (car  $x$  et  $y$  jouent des rôles symétriques), d'où

$C = 2\pi \lambda R^3$ . En utilisant le fait que  $\lambda = \frac{m}{2\pi R}$ , il vient :  $A = \frac{1}{2} m R^2$  et  $C = m R^2$ . D'où

$$J_{B_0}(C, O_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & m R^2 \end{bmatrix}_{B_0}.$$

### 3. Disque:

Les propriétés de symétrie du disque font que le repère défini par la base  $B_0$  est un repère central d'inertie, pour lequel la matrice d'inertie est bien sûr diagonale. De plus, les moments d'inertie par rapport aux axes  $O_0 x_0$  et  $O_0 y_0$  sont égaux. D'où

$J_{B_0}(D, O_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_0}$ . Le calcul se fait en coordonnées polaires qui sont plus

commodes à décrire la géométrie circulaire qui intervient dans cette question. On a alors :  $A = \iint_D y^2 dm = \sigma \iint_D y^2 dS = \sigma \iint_D y^2 r dr d\theta = \sigma \iint_D r^3 \sin^2(\theta) dr d\theta$ . Le domaine d'intégration défini par  $r \in [0, R]$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$  ne dépend pas des variables en jeu, donc

$A = \iint_D y^2 dm = \sigma \left( \int_0^R r^3 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) = \sigma \frac{\pi R^4}{4}$ . Comme  $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$ , on obtient  $A = \frac{m R^2}{4}$ .

Remarquons que  $C = \iint_D (x^2 + y^2) dm = 2A$ . D'où  $C = \frac{m R^2}{2}$ . Finalement la matrice d'inertie

du disque en  $O_0$  dans la base  $B_0$  est donnée par :  $J_{B_0}(D, O_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{bmatrix}_{B_0}$ .

### 4. Cylindre plein de révolution:

La symétrie de révolution montre que le repère défini par la base  $B_0$  est central d'inertie. De plus, les moments d'inertie par rapport aux axes  $O_0 x_0$  et  $O_0 y_0$  sont égaux.

D'où  $J_{B_0}(C, O_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_0}$ . Les coordonnées cylindriques s'imposent ici et on a :

$$A = \iiint_C (y^2 + z^2) dm = \rho \iiint_C (y^2 + z^2) dV \quad \text{et} \quad C = \iiint_C (x^2 + y^2) dm = \rho \iiint_C r^2 dV \quad \text{avec} \quad dV = r dr d\theta dz.$$

En utilisant le fait que le domaine d'intégration ne dépend pas des variables, il vient:

$$* A = \rho \iiint_C (y^2 + z^2) r dr d\theta dz = \rho \iiint_C (r^2 \sin^2(\theta) + z^2) r dr d\theta dz = \rho \iiint_C r^3 \sin^2(\theta) dr d\theta dz + \rho \iiint_C r z^2 dr d\theta dz$$

$$\text{soit} \quad A = \rho \left( \int_0^R r^3 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) \left( \int_{-h}^h dz \right) + \rho \left( \int_0^R r dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_{-h}^h z^2 dz \right), \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$A = \rho \left( \frac{R^4}{4} \right) (\pi) (2h) + \rho \left( \frac{R^2}{2} \right) (2\pi) \left( 2 \frac{h^3}{3} \right) = \rho \pi R^2 h \left( \frac{3R^2 + 2h^2}{6} \right). \quad \text{Avec} \quad m = \rho \pi R^2 h, \quad \text{on obtient}$$

$$A = \frac{m(3R^2 + 2h^2)}{6}.$$

$$* \quad C = \iiint_C (x^2 + y^2) dm = \rho \iiint_C r^2 r dr d\theta dz = \rho \left( \int_0^R r^3 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_{-h}^h dz \right) = \rho \frac{R^4}{4} (2\pi) (2h), \quad \text{soit}$$

$$C = mR^2.$$

$$\text{Finalement : } J_{B_0}(C, O_0) = \begin{bmatrix} \frac{m(3R^2 + 2h^2)}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(3R^2 + 2h^2)}{6} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}_{B_0}.$$

Remarquons que lorsqu'on fait tendre  $h \rightarrow 0$  dans la matrice d'inertie ci-dessus, on récupère le cas de la matrice d'inertie du disque considéré la question 3.

## 5. Parallélépipède droit plein P :

Le repère défini par la base  $B_0$  est central d'inertie, donc la matrice d'inertie de P

$$\text{admet la forme diagonale suivante:} \quad J_{B_0}(P, O_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_0}. \quad \text{On a :}$$

$$A = \iiint_C (y^2 + z^2) dm = \rho \iiint_C (y^2 + z^2) dV = \rho \iiint_C (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \iiint_C y^2 dx dy dz + \rho \iiint_C z^2 dx dy dz.$$

Comme le domaine d'intégration  $x \in [-a, a]$ ,  $y \in [-b, b]$  et  $z \in [-c, c]$  ne dépend pas des variables d'intégration, l'intégrale de volume définissant A se transforme en le produit de trois intégrales simples, ce qui donne

$$A = \rho \iiint_C y^2 dx dy dz + \rho \iiint_C z^2 dx dy dz = \rho \left( \int_{-a}^a dx \right) \left( \int_{-b}^b y^2 dy \right) \left( \int_{-c}^c dz \right) + \rho \left( \int_{-a}^a dx \right) \left( \int_{-b}^b dy \right) \left( \int_{-c}^c z^2 dz \right). \quad \text{D'où}$$

$$A = \rho (2a) \left( \frac{2}{3} b^3 \right) (2c) + \rho (2a) (2b) \left( \frac{2}{3} c^3 \right) = \frac{8}{3} \rho abc (b^2 + c^2). \quad \text{Sachant que la masse } m = 8\rho abc,$$

$$\text{on obtient : } A = \frac{m(b^2 + c^2)}{3}.$$

Du fait que les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'une part et les constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$  d'autre part jouent des rôles symétriques, on déduit que :  $B = \frac{m(a^2 + c^2)}{3}$  et  $C = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$ . D'où finalement :

$$J_{B_0}(P, O_0) = \begin{bmatrix} \frac{m(b^2 + c^2)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(a^2 + c^2)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2 + b^2)}{3} \end{bmatrix}_{B_0}.$$

## 6. Plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable :

On peut faire un calcul direct, mais il vaut mieux déduire la matrice d'inertie de la plaque infiniment mince à partir de la matrice d'inertie du parallélépipède vu dans la question 5. Il suffit de faire tendre  $c \rightarrow 0$ . Il vient alors

$$J_{B_0}(P, O_0) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2 + b^2)}{3} \end{bmatrix}_{B_0}.$$

## Exercice 7:

Dans cet exercice, on utilise le principe de superposition avec une masse négative pour représenter l'évidement qui affecte la plaque rectangulaire. Cette façon de faire permet de simplifier les calculs et on n'aura pas à intégrer sur un domaine à frontière un peu biscornue.

### 1) \* Calcul du centre d'inertie de la plaque rectangulaire pleine P :

De manière évidente, on a :  $x_{Gp} = \frac{a}{2}$ ,  $y_{Gp} = 0$  et  $z_{Gp} = 0$ .

### \* Calcul du centre d'inertie du demi-cercle C :

Du fait que le problème est plan et par raison de symétrie par rapport à l'axe  $Ox$ , on a :  $y_{Gc} = 0$  et  $z_{Gc} = 0$ . Calculons  $x_{Gc} = 0$ .

Par définition :  $x_{G_c} = \frac{\iint_C x dm}{\iint_C dm} = \frac{\sigma \iint_C x dS}{\sigma \iint_C dS} = \frac{\iint_C x r dr d\theta}{\iint_C r dr d\theta} = \frac{\iint_C r^2 \cos(\theta) dr d\theta}{\iint_C r dr d\theta}$ . Le domaine d'intégration est  $r \in [0, R]$  et  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , il ne dépend pas des variables.

$$\text{D'où } x_{G_c} = \frac{\iint_C r^2 \cos(\theta) dr d\theta}{\iint_C r dr d\theta} = \frac{\left(\int_0^R r^2 dr\right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta\right)}{\left(\int_0^R r dr\right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\right)} = \frac{\left(\frac{R^3}{3}\right)(2)}{\left(\frac{R^2}{2}\right)(\pi)}, \text{ soit } x_{G_c} = \frac{4}{3\pi} R.$$

**\* Calcul du centre d'inertie de la plaque rectangulaire évidée  $\Sigma$  :**

Ce point est le barycentre du système  $\left\{ (G_p, \sigma ah), \left( G_c, -\frac{\sigma \pi R^2}{2} \right) \right\}$ , ce qui donne :

$$\boxed{y_{G_\Sigma} = z_{G_\Sigma} = 0} \text{ et } x_{G_\Sigma} = \frac{\sigma ah \frac{a}{2} - \frac{\sigma \pi R^2}{2} \frac{4}{3\pi} R}{\sigma ah - \frac{\sigma \pi R^2}{2}}, \text{ soit } \boxed{x_{G_\Sigma} = \frac{3ha^2 - 4R^3}{3(2ah - \pi R^2)}}.$$

**2) \* Moments d'inertie de la plaque pleine P :**

$$\text{D'après la question 6 de l'exercice 6, on a : } J_{B_0}(P, G_p) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma ah^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma ha^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma ah(a^2 + h^2)}{12} \end{bmatrix}_{B_0}. \text{ D'où}$$

$$\text{les moments d'inertie : } I(P/G_p, x) = \frac{\sigma ah^3}{12} \text{ et } I(P/G_p, y) = \frac{\sigma ha^2}{12}.$$

$$\text{En utilisant le théorème de Huyghens, il vient : } I(P/O_x) = \frac{\sigma ah^3}{12} \text{ et}$$

$$I(P/O_y) = \frac{\sigma ha^2}{12} + \sigma ah x_{G_p}^2 = \frac{\sigma ha^2}{12} + \frac{\sigma ha^2}{4}, \text{ soit } I(P/O_y) = \frac{\sigma ha^2}{3}.$$

**\* Moments d'inertie du demi-cercle C :**

Les propriétés de symétrie du demi-cercle font que dans le repère défini par la base  $B_0$

$$\text{la matrice d'inertie est diagonale et ayant la forme suivante : } J_{B_0}(D, O) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_0}.$$

Seuls A et B sont demandés.

\*  $A = \iint_D y^2 dm = \sigma \iint_D y^2 dS = \sigma \iint_D y^2 r dr d\theta = \sigma \iint_D r^3 \sin^2(\theta) dr d\theta$ . Le domaine d'intégration défini par  $r \in [0, R]$  et  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  ne dépend pas des variables, donc

$$A = \iint_D y^2 dm = \sigma \left( \int_0^R r^3 dr \right) \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(\theta) d\theta \right) = \sigma \frac{\pi R^4}{8}, \text{ ce qui donne : } I(C/Ox) = A = \sigma \frac{\pi R^4}{8}.$$

\*  $B = \iint_D x^2 dm = \sigma \iint_D x^2 dS = \sigma \iint_D x^2 r dr d\theta = \sigma \iint_D r^3 \cos^2(\theta) dr d\theta$ . Le domaine d'intégration défini par  $r \in [0, R]$  et  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  ne dépend pas non plus des variables, donc

$$B = \iint_D x^2 dm = \sigma \left( \int_0^R r^3 dr \right) \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta \right), \text{ ce qui donne : } I(C/Oy) = B = \sigma \frac{\pi R^4}{8}.$$

**\* Moments d'inertie de la plaque évidée  $\Sigma$  :**

Ces moments s'obtiennent par application du principe de superposition. D'où

$$I(\Sigma/Ox) = I(P/Ox) - I(C/Ox) = \frac{\sigma a h^3}{12} - \sigma \frac{\pi R^4}{8} \quad \text{et} \quad I(\Sigma/Oy) = I(P/Oy) - I(C/Oy) = \frac{\sigma h a^2}{3} - \sigma \frac{\pi R^4}{8},$$

soit  $\boxed{I(\Sigma/Ox) = \frac{\sigma(2ah^3 - 3\pi R^4)}{24}} \quad \text{et} \quad \boxed{I(\Sigma/Oy) = \frac{\sigma(8ha^2 - 3\pi R^4)}{24}}.$

**Module Physique 6**  
**Mécanique du solide indéformable**  
**Série N°4**

**Exercice 1:**

Soit  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère orthonormé direct par rapport auquel on étudie le mouvement d'un système  $\Sigma$ .  $\Sigma$  est constitué de deux solides (B) et (D) :

- (B) est une tige rectiligne homogène de section négligeable, de longueur  $2\ell$ , de masse  $m$ , astreinte à rester parallèle au plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , l'une de ses extrémités A restant fixe sur  $(O, \vec{z}_0)$  ;  $\overrightarrow{OA} = R\vec{z}_0$  ( $R$  constante positive donnée). On appelle J le milieu de (B).

- (D) est un disque homogène de rayon  $R$ , de masse  $M$ , dont le centre C décrit (B), l'axe du disque restant constamment confondu avec (B). (D) est alors au contact du plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  en un point de sa circonférence; on appelle I le point de contact.

On pose  $\overrightarrow{AC} = \lambda \vec{x}_1$ , avec  $\lambda > 0$ , et on complète par  $\vec{y}_1$  le repère  $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  orthonormé direct. Soit  $\mathcal{R}(C, \vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z})$  un repère orthonormé direct lié à (D). On pose  $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ , mesuré autour de  $\vec{z}_0$ , et  $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z})$ , mesuré autour de  $\vec{x}_1$ .

1) Déterminer par leurs éléments de réduction en C les torseurs cinétique et dynamique du système  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

2) Calculer  $\vec{\sigma}(I, \Sigma/\mathcal{R}_0)$  et  $\vec{\delta}(I, \Sigma/\mathcal{R}_0)$ .

3) Calculer  $2T(\Sigma/\mathcal{R}_0)$ .

**Exercice 2:**

Soit  $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère orthonormé direct lié à un bâti  $B_0$ . On considère un système matériel  $\Sigma$  constitué de trois solides  $S_1, S_2, S$ .  $\Sigma$  est mobile dans  $\mathcal{R}_0$  de la façon suivante, figure 1 au verso :

-  $S_1$  est en liaison rotoïde d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec  $B_0$  (c'est-à-dire que les seuls mouvements possibles de  $S_1$  par rapport à  $B_0$  sont les mouvements de rotations d'axe  $(O, \vec{z}_0)$ ). Soit  $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  un repère orthonormé direct lié à  $S_1$ . Soit A le point lié à  $S_1$  défini par  $\overrightarrow{OA} = \ell \vec{x}_1$  ( $\ell > 0$  constante donnée).

On note  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ , mesuré autour de  $\vec{z}_0$ .

-  $S_2$  est en liaison rotoïde d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec  $S_1$  (mouvements possibles de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ : mouvements de rotations d'axe  $(A, \vec{z}_0)$ ). Soit  $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  un repère orthonormé direct lié à  $S_2$ .

On note  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ , mesuré autour de  $\vec{z}_0$ .

- S est en liaison verrou d'axe  $(A, \vec{x}_2)$  avec  $S_2$  (mouvements possibles de S par rapport à  $S_2$  : mouvements de rotations d'axe  $(A, \vec{x}_2)$  et mouvements de translation rectiligne de vecteur  $\vec{x}_2$ ).

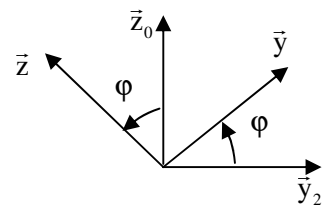
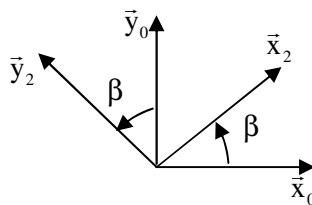
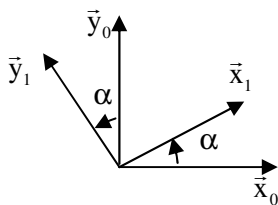
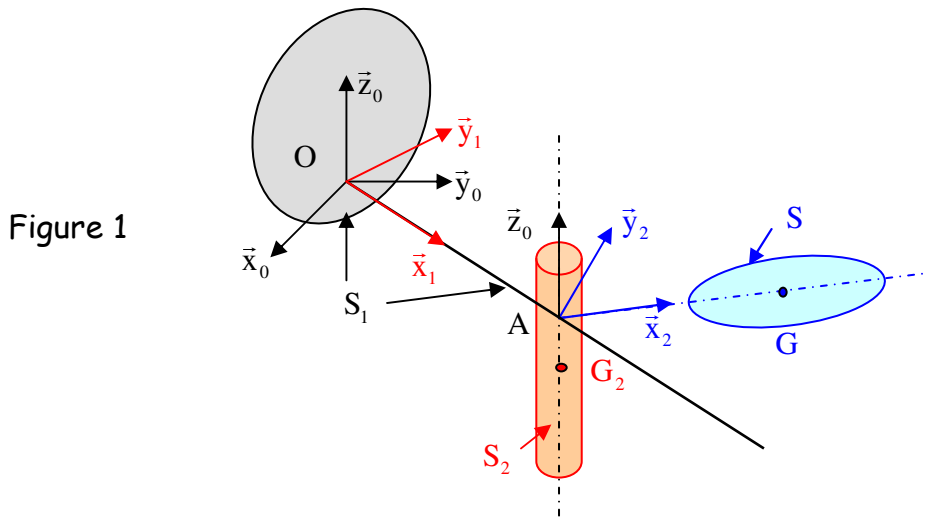
Soit G un point lié à S et qui se déplace sur la droite  $(A, \vec{x}_2)$ . On note  $\mathcal{R}(G, \vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_2)$  un repère orthonormé direct lié à S,  $\varphi = (\vec{y}_2, \vec{y}) = (\vec{z}_0, \vec{z})$ , mesuré autour de  $\vec{x}_2$  et  $\overrightarrow{AG} = \lambda \vec{x}_2$ .

On note  $I_1$  le moment d'inertie de  $S_1$  relativement à  $(O, \vec{z}_0)$ ,  $m_2$  la masse de  $S_2$  et  $I_2$  le moment d'inertie de  $S_2$  relativement à  $(A, \vec{z}_0)$ . On suppose que le centre d'inertie  $G_2$  de  $S_2$  est situé sur  $(A, \vec{z}_0)$ . On suppose que G est le centre d'inertie de S et que  $(G, \vec{x}_2)$  est axe de révolution matérielle pour S. On note M la masse de S, A et C les moments centraux principaux d'inertie de S (C relatif à  $(G, \vec{x}_2)$ ).

1) Calculer  $\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0)$ ,  $\vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ ,  $\vec{\sigma}(A, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ ,  $\vec{\sigma}(O, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$  et  $\vec{\sigma}(O, S_1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ .

2) Calculer  $2T(S_1/\mathcal{R}_0)$ ,  $2T(S_2/\mathcal{R}_0)$  et  $2T(S/\mathcal{R}_0)$ .

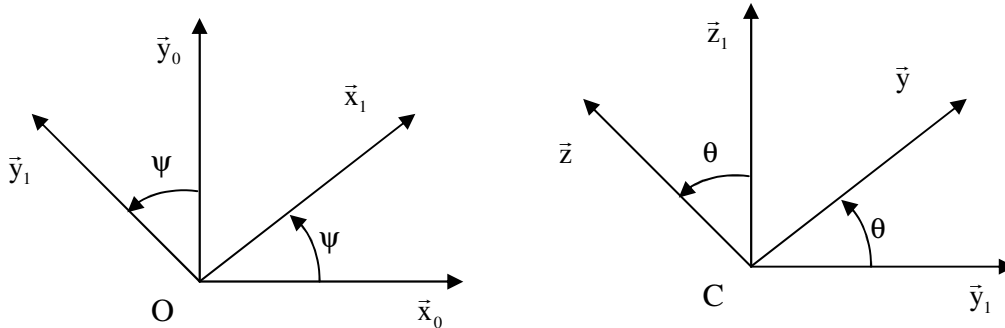
3) Calculer  $\vec{\delta}(A, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ ,  $\vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ ,  $\vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{x}_2$  et  $\vec{\delta}(O, \Sigma/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$ .



**Module Physique 6**  
**TD de mécanique du solide indéformable**  
**Corrigé de la série N°4**

**Exercice 1 :**

Avant de commencer les calculs, il est utile de faire les deux représentations suivantes des rotations qui interviennent dans cet exercice.



Notons  $B_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  la base de  $\mathcal{R}_1$ .

**1) \*Torseur cinétique du mouvement de  $\Sigma$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  réduit au point C :**

On a :  $\tau_\sigma(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \tau_\sigma(B/\mathcal{R}_0) + \tau_\sigma(D/\mathcal{R}_0)$  avec  $\tau_\sigma(B/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} m\bar{v}(J/\mathcal{R}_0) \\ \bar{\sigma}(C, B/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix}_C$  et

$$\tau_\sigma(D/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} M\bar{v}(C/\mathcal{R}_0) \\ \bar{\sigma}(C, D/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix}_C.$$

**\* Résultante du Torseur cinétique  $\tau_\sigma(\Sigma/\mathcal{R}_0)$**

On a :  $\vec{R}_\sigma = m\bar{v}(J/\mathcal{R}_0) + M\bar{v}(C/\mathcal{R}_0)$ . Calculons les vitesses.

$$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AJ} = R\bar{z}_1 + \ell\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{v}(J/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\overrightarrow{OJ}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \ell \left. \frac{d\bar{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}. \text{ Ce qui donne } \bar{v}(J/\mathcal{R}_0) = \ell\dot{\psi}\bar{y}_1.$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = R\bar{z}_1 + \lambda\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{v}(C/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d(\lambda\bar{x}_1)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}\bar{x}_1 + \lambda \left. \frac{d\bar{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}. \text{ Ce qui donne}$$

$$\bar{v}(C/\mathcal{R}_0) = \dot{\lambda}\bar{x}_1 + \lambda\dot{\psi}\bar{y}_1.$$

D'où  $\vec{R}_\sigma = m\bar{v}(J/\mathcal{R}_0) + M\bar{v}(C/\mathcal{R}_0) = m\ell\dot{\psi}\bar{y}_1 + M\dot{\lambda}\bar{x}_1 + M\lambda\dot{\psi}\bar{y}_1$ , soit  $\vec{R}_\sigma = \begin{bmatrix} M\dot{\lambda} \\ (m\ell + M\lambda)\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1}.$

**\* Moment du Torseur cinétique  $\tau_c(\Sigma/\mathfrak{R}_0)$  en C**

On a :  $\vec{\sigma}(C, \Sigma/\mathfrak{R}_0) = \vec{\sigma}(C, B/\mathfrak{R}_0) + \vec{\sigma}(C, D/\mathfrak{R}_0)$ .

- D'après la relation de distribution du torseur cinétique associé au mouvement de B par rapport à  $\mathfrak{R}_0$ , on a :  $\vec{\sigma}(C, B/\mathfrak{R}_0) = \vec{\sigma}(J, B/\mathfrak{R}_0) + m\vec{v}(J/\mathfrak{R}_0) \wedge \vec{JC}$ . Par ailleurs le premier théorème de Koenig permet d'écrire :  $\vec{\sigma}(J, B/\mathfrak{R}_0) = J(B; J)\vec{\Omega}(B/\mathfrak{R}_0) + m\vec{JJ} \wedge \vec{v}(J/\mathfrak{R}_0)$  avec

$$J(B; J) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}_{B_1} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}(B/\mathfrak{R}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}, \quad \text{d'où} \quad \vec{\sigma}(J, B/\mathfrak{R}_0) = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\psi} \vec{z}_1. \quad \text{Avec}$$

$$\vec{JC} = \vec{JA} + \vec{AC} = (\lambda - \ell) \vec{x}_1, \quad \text{il vient} \quad m\vec{v}(J/\mathfrak{R}_0) \wedge \vec{JC} = m \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1} \wedge \begin{bmatrix} \lambda - \ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1} = m\ell(\ell - \lambda) \dot{\psi} \vec{z}_1, \quad \text{d'où}$$

$$\vec{\sigma}(C, B/\mathfrak{R}_0) = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\psi} \vec{z}_1 + m\ell(\ell - \lambda) \dot{\psi} \vec{z}_1, \quad \text{soit} \quad \vec{\sigma}(C, B/\mathfrak{R}_0) = m\ell \left( \frac{4}{3} \ell - \lambda \right) \dot{\psi} \vec{z}_1.$$

- D'après le théorème de Koenig appliqué au mouvement de D par rapport à  $\mathfrak{R}_0$ , on a :

$$\vec{\sigma}(C, D/\mathfrak{R}_0) = J(D; C)\vec{\Omega}(D/\mathfrak{R}_0) + m\vec{CC} \wedge \vec{v}(C/\mathfrak{R}_0) \quad \text{avec} \quad J(D; C) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{4} \end{bmatrix}_{B_1} \quad \text{et}$$

$$\vec{\Omega}(D/\mathfrak{R}_0) = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}, \quad \text{ce qui donne :} \quad \vec{\sigma}(C, D/\mathfrak{R}_0) = \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \vec{x}_1 + \frac{MR^2}{4} \dot{\psi} \vec{z}_1.$$

$$\text{D'où} \quad \vec{\sigma}(C, \Sigma/\mathfrak{R}_0) = \vec{\sigma}(C, B/\mathfrak{R}_0) + \vec{\sigma}(C, D/\mathfrak{R}_0) = m\ell \left( \frac{4}{3} \ell - \lambda \right) \dot{\psi} \vec{z}_1 + \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \vec{x}_1 + \frac{MR^2}{4} \dot{\psi} \vec{z}_1, \quad \text{soit}$$

$$\vec{\sigma}(C, \Sigma/\mathfrak{R}_0) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \\ 0 \\ \left[ \frac{MR^2}{4} + m\ell \left( \frac{4}{3} \ell - \lambda \right) \right] \dot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}.$$

**\*Torseur dynamique du mouvement de  $\Sigma$  par rapport à  $\mathfrak{R}_0$  réduit au point C :**

Notons ce torseur dynamique  $\tau_\delta(\Sigma/\mathfrak{R}_0) = \begin{bmatrix} \vec{R}_\delta \\ \vec{\delta}(C, \Sigma/\mathfrak{R}_0) \end{bmatrix}_C$ . On a alors:

$$\vec{R}_\delta = m\vec{\gamma}(J/\mathfrak{R}_0) + M\vec{\gamma}(C/\mathfrak{R}_0) \quad \text{et} \quad \vec{\delta}(C, \Sigma/\mathfrak{R}_0) = \vec{\delta}(C, B/\mathfrak{R}_0) + \vec{\delta}(C, D/\mathfrak{R}_0).$$

**\* Calcul de  $\vec{R}_\delta$**

$$\vec{v}(J/\mathcal{R}_0) = \ell\dot{\psi}\vec{y}_1 \Rightarrow \vec{\gamma}(J/\mathcal{R}_0) = \frac{d(\ell\dot{\psi}\vec{y}_1)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \ell\ddot{\psi}\vec{y}_1 - \ell\dot{\psi}^2\vec{x}_1, \text{ soit } \vec{\gamma}(J/\mathcal{R}_0) = -\ell\dot{\psi}^2\vec{x}_1 + \ell\ddot{\psi}\vec{y}_1.$$

$$\vec{v}(C/\mathcal{R}_0) = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + \lambda\dot{\psi}\vec{y}_1 \Rightarrow \vec{\gamma}(C/\mathcal{R}_0) = \frac{d(\dot{\lambda}\vec{x}_1 + \lambda\dot{\psi}\vec{y}_1)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}\vec{x}_1 + (\dot{\lambda}\dot{\psi} + \lambda\ddot{\psi})\vec{y}_1 + \dot{\lambda}\dot{\psi}\vec{y}_1 - \lambda\dot{\psi}^2\vec{x}_1, \text{ soit}$$

$$\vec{\gamma}(C/\mathcal{R}_0) = (\ddot{\lambda} - \lambda\dot{\psi}^2)\vec{x}_1 + (\lambda\ddot{\psi} + 2\dot{\lambda}\dot{\psi})\vec{y}_1. \text{ D'où}$$

$$\vec{R}_\delta = m\vec{\gamma}(J/\mathcal{R}_0) + M\vec{\gamma}(C/\mathcal{R}_0) = m \begin{bmatrix} -\ell\dot{\psi}^2 \\ \ell\ddot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1} + M \begin{bmatrix} \ddot{\lambda} - \lambda\dot{\psi}^2 \\ \lambda\ddot{\psi} + 2\dot{\lambda}\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1}, \text{ soit}$$

$$\vec{R}_\delta = \begin{bmatrix} -m\ell\dot{\psi}^2 + M(\ddot{\lambda} - \lambda\dot{\psi}^2) \\ m\ell\ddot{\psi} + M(\lambda\ddot{\psi} + 2\dot{\lambda}\dot{\psi}) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1}.$$

**\* Calcul de  $\vec{\delta}(C, \Sigma/\mathcal{R}_0)$**

- D'après le deuxième théorème de Koenig, on a :

$$\vec{\delta}(C, B/\mathcal{R}_0) = \frac{d\vec{\sigma}(C, B/\mathcal{R}_0)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} + m\vec{v}(C/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v}(J/\mathcal{R}_0), \text{ où } \vec{v}(C/\mathcal{R}_0) \text{ désigne la vitesse du}$$

point géométrique C non nécessairement lié au mouvement de B par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

$$\frac{d\vec{\sigma}(C, B/\mathcal{R}_0)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \frac{d \left[ m\ell \left( \frac{4}{3}\ell - \lambda \right) \dot{\psi} \vec{z}_1 \right]}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \left[ m\ell \left( \frac{4}{3}\ell - \lambda \right) \ddot{\psi} - m\ell\dot{\lambda}\dot{\psi} \right] \vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell \left( \frac{4}{3}\ell - \lambda \right) \ddot{\psi} - m\ell\dot{\lambda}\dot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}$$

$$m\vec{v}(C/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v}(J/\mathcal{R}_0) = m \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \lambda\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \ell\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell\dot{\lambda}\dot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}. \text{ D'où}$$

$$\vec{\delta}(C, B/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell \left( \frac{4}{3}\ell - \lambda \right) \ddot{\psi} - m\ell\dot{\lambda}\dot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell\dot{\lambda}\dot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}, \text{ soit } \vec{\delta}(C, B/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell \left( \frac{4}{3}\ell - \lambda \right) \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}$$

- D'après le deuxième théorème de Koenig appliqué à D/ $\mathcal{R}_0$ , on a :

$$\vec{\delta}(C, D/\mathcal{R}_0) = \frac{d\vec{\sigma}(C, D/\mathcal{R}_0)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} + m\vec{v}(C/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v}(C/\mathcal{R}_0).$$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(C, D/\mathfrak{R}_0)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_0} = \left. \frac{d \left( \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \vec{x}_1 + \frac{MR^2}{4} \dot{\psi} \vec{z}_1 \right)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_0} = \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} \vec{x}_1 + \frac{MR^2}{4} \ddot{\psi} \vec{z}_1 + \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \vec{y}_1, \text{ soit}$$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(C, D/\mathfrak{R}_0)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_0} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} \\ \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \\ \frac{MR^2}{4} \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}, \text{ ce qui donne } \vec{\delta}(C, D/\mathfrak{R}_0) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} \\ \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \\ \frac{MR^2}{4} \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}.$$

$$\text{D'où } \vec{\delta}(C, \Sigma/\mathfrak{R}_0) = \vec{\delta}(C, B/\mathfrak{R}_0) + \vec{\delta}(C, D/\mathfrak{R}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell \left( \frac{4}{3} \ell - \lambda \right) \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1} + \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} \\ \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \\ \frac{MR^2}{4} \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}, \text{ soit}$$

$$\boxed{\vec{\delta}(C, \Sigma/\mathfrak{R}_0) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} \\ \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \\ \left[ \frac{MR^2}{4} + m\ell \left( \frac{4}{3} \ell - \lambda \right) \right] \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}}.$$

## 2) \*Calcul de $\vec{\sigma}(I, \Sigma/\mathfrak{R}_0)$

La relation de distribution du torseur cinétique de  $\Sigma/\mathfrak{R}_0$  permet d'écrire :

$\vec{\sigma}(I, \Sigma/\mathfrak{R}_0) = \vec{\sigma}(C, \Sigma/\mathfrak{R}_0) + \vec{R}_\sigma \wedge \vec{CI}$ , ce qui donne :

$$\vec{\sigma}(I, \Sigma/\mathfrak{R}_0) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} \\ 0 \\ \left[ \frac{MR^2}{4} + m\ell \left( \frac{4}{3} \ell - \lambda \right) \right] \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1} + \begin{bmatrix} M\dot{\lambda} \\ (m\ell + M\lambda) \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}_{B_1}, \text{ soit}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(I, \Sigma/\mathfrak{R}_0) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} - (m\ell + M\lambda) R \dot{\psi} \\ 0 \\ \left[ \frac{MR^2}{4} + m\ell \left( \frac{4}{3} \ell - \lambda \right) \right] \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}}.$$

**\*Calcul de  $\vec{\delta}(I, \Sigma/\mathcal{R}_0)$**

La relation de distribution du torseur dynamique de  $\Sigma/\mathcal{R}_0$  On a :

$\vec{\delta}(I, \Sigma/\mathcal{R}_0) = \vec{\delta}(C, \Sigma/\mathcal{R}_0) + \vec{R}_\delta \wedge \vec{CI}$ , ce qui donne :

$$\vec{\delta}(I, \Sigma/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} \\ \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \\ \left[ \frac{MR^2}{4} + m\ell \left( \frac{4}{3} \ell - \lambda \right) \right] \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1} + \begin{bmatrix} -m\ell \dot{\psi}^2 + M(\ddot{\lambda} - \lambda \dot{\psi}^2) \\ m\ell \ddot{\psi} + M(\lambda \ddot{\psi} + 2\dot{\lambda} \dot{\psi}) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_1} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}_{B_1}, \text{ soit}$$

$$\vec{\delta}(I, \Sigma/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{2} \ddot{\theta} - R(m\ell + M\lambda) \ddot{\psi} - 2MR\dot{\lambda} \dot{\psi} \\ \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} - R(m\ell + M\lambda) \dot{\psi}^2 + MR\ddot{\lambda} \\ \left[ \frac{MR^2}{4} + m\ell \left( \frac{4}{3} \ell - \lambda \right) \right] \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{B_1}.$$

**3) Calcul de  $2T(\Sigma/\mathcal{R}_0)$**

On a :  $2T(\Sigma/\mathcal{R}_0) = 2T(B/\mathcal{R}_0) + 2T(D/\mathcal{R}_0)$

- D'après le troisième théorème de Koenig appliqué à  $B/\mathcal{R}_0$ , on a :

$$2T(B/\mathcal{R}_0) = m \|\vec{v}(A/\mathcal{R})\|^2 + \vec{\Omega}(B/\mathcal{R}_0) \cdot J(B; A) \vec{\Omega}(B/\mathcal{R}_0) + m \vec{\Omega}(B/\mathcal{R}_0) \cdot [\vec{AJ} \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R})].$$

(Le choix du point A est commode car seul le terme intermédiaire de l'énergie cinétique subsiste).

D'après le théorème de Huyghens, on a :

$$J(B; A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}_{B_1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & m\ell^2 \end{bmatrix}_{B_1}, \text{ soit } J(B; A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4m\ell^2}{3} \end{bmatrix}_{B_1}, \text{ d'où}$$

$$2T(B/\mathcal{R}_0) = \frac{4m\ell^2}{3} \dot{\psi}^2 \vec{z}_1.$$

- D'après le troisième théorème de Koenig appliqué à  $D/\mathcal{R}_0$ , on a :

$$2T(D/\mathcal{R}_0) = M \|\vec{v}(C/\mathcal{R})\|^2 + \vec{\Omega}(D/\mathcal{R}_0) \cdot J(D; C) \vec{\Omega}(D/\mathcal{R}_0) + M \vec{\Omega}(D/\mathcal{R}_0) \cdot [\vec{CC} \wedge \vec{v}(C/\mathcal{R})].$$

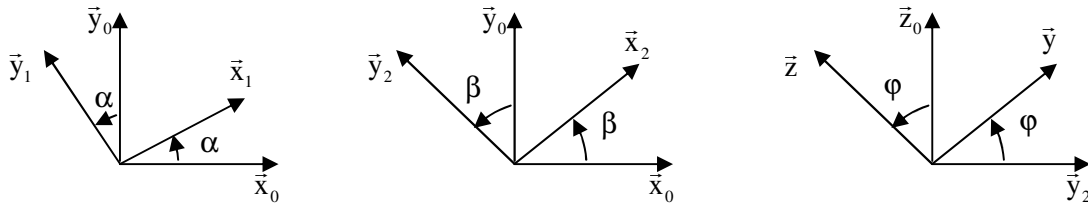
Ce qui donne  $2T(D/\mathcal{R}_0) = M(\dot{\lambda}^2 + \lambda^2 \dot{\psi}^2) + \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{MR^2}{4} \dot{\psi}^2$ , soit

$$2T(D/\mathcal{R}_0) = M\dot{\lambda}^2 + \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2 + M \left( \lambda^2 + \frac{R^2}{4} \right) \dot{\psi}^2.$$

$$\text{D'où } 2T(\Sigma/\mathcal{R}_0) = M\dot{\lambda}^2 + \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2 + \left[ M \left( \lambda^2 + \frac{R^2}{4} \right) + \frac{4m\ell^2}{3} \right] \dot{\psi}^2.$$

## Exercice 2:

Rappelons les représentations des rotations qui interviennent dans cet exercice.



Quatre repères sont en jeu:

- $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  repère absolu
- $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  lié au solide  $S_1$  ;
- $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  lié au solide  $S_2$  ;
- $\mathcal{R}(G, \vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_2)$  lié au solide  $S$ .

Les vitesses de rotation instantanée des solides par rapport à  $\mathcal{R}_0$  sont donnés par:

$$\vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\alpha} \vec{z}_0 ; \quad \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) = \dot{\beta} \vec{z}_0 \text{ et } \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = \dot{\phi} \vec{x}_2 + \dot{\beta} \vec{z}_0$$

**Remarque préliminaire importante :** La base de travail n'a pas été indiquée dans cet exercice, pour la choisir on a intérêt à retenir celle qui permet d'exprimer la matrice d'inertie sous une forme simple (en l'occurrence une base centrale d'inertie). Ainsi pour calculer le moment cinétique de  $S$ , la base de  $\mathcal{R}_2$  convient. Cette base convient aussi pour le solide  $S_2$ , mais pour  $S_1$  ce sont les bases de  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  qui sont les plus appropriées.

### 1) \* Calcul de $\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0)$

D'après le théorème de Koenig I, on a :  $\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0) = J(S; G) \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) + M \overrightarrow{GG} \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$ ,

soit  $\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0) = J(S; G) \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$ . La matrice d'inertie du solide de révolution  $S$  en  $G$  par rapport à la base  $B_2$  du repère  $\mathcal{R}_2$ , qui est central d'inertie (car  $\vec{x}_2$  est l'axe de

révolution) admet la forme suivante :  $J(S; G) = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{B_2}$ . Le vecteur rotation

instantanée est  $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}_{B_2}$ . D'où  $\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{B_2} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} C\dot{\phi} \\ 0 \\ A\dot{\beta} \end{bmatrix}_{B_2}$ , soit

$$\boxed{\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0) = C\dot{\phi} \vec{x}_2 + A\dot{\beta} \vec{z}_0.}$$

\* **Calcul de  $\vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$**

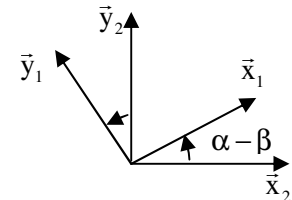
On utilise la relation de distribution du torseur cinétique décrivant le mouvement de S par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . On a :  $\vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0) = \vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0) + M\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{GO}$ . Calculons  $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$ .

On a :  $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \ell\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2$ , d'où  $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = \frac{d(\ell\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \ell \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} + \dot{\lambda}\vec{x}_2 + \lambda \frac{d\vec{x}_2}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0}$ ,

soit  $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = \frac{d(\ell\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \ell\dot{\alpha}\vec{y}_1 + \dot{\lambda}\vec{x}_2 + \lambda\dot{\beta}\vec{y}_2$ . En effectuant la projection de  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$

dans la base  $B_2$  (figure ci-contre), il vient :

$$\vec{x}_1 = \cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2 \text{ et } \vec{y}_1 = -\sin(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \cos(\alpha - \beta)\vec{y}_2.$$



$$\text{D'où } \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = \dot{\lambda}\vec{x}_2 + \lambda\dot{\beta}\vec{y}_2 + \ell\dot{\alpha}[-\sin(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \cos(\alpha - \beta)\vec{y}_2],$$

c'est-à-dire  $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = [\dot{\lambda} - \ell\dot{\alpha}\sin(\alpha - \beta)]\vec{x}_2 + [\lambda\dot{\beta} + \ell\dot{\alpha}\cos(\alpha - \beta)]\vec{y}_2$ . De même

$$\vec{GO} = -\ell\vec{x}_1 - \lambda\vec{x}_2 = -\ell[\cos(\alpha - \beta)\vec{x}_2 + \sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2] - \lambda\vec{x}_2 = -[\lambda + \ell\cos(\alpha - \beta)]\vec{x}_2 - \ell\sin(\alpha - \beta)\vec{y}_2.$$

$$\text{D'où } M\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{GO} = M \begin{bmatrix} \dot{\lambda} - \ell\dot{\alpha}\sin(\alpha - \beta) \\ \lambda\dot{\beta} + \ell\dot{\alpha}\cos(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \wedge \begin{bmatrix} -\lambda - \ell\cos(\alpha - \beta) \\ -\ell\sin(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2}, \text{ soit après calcul}$$

$$M\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{GO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M\ell\dot{\lambda}\sin(\alpha - \beta) + M\ell^2\dot{\alpha} + \lambda^2\dot{\beta} + M\ell\lambda(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix}_{B_2}. \text{ En remplaçant}$$

dans l'expression de  $\vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0)$ , il vient :

$$\vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0) = C\dot{\phi}\vec{x}_2 + A\dot{\beta}\vec{z}_0 + [-M\ell\dot{\lambda}\sin(\alpha - \beta) + M\ell^2\dot{\alpha} + M\lambda^2\dot{\beta} + M\ell\lambda(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos(\alpha - \beta)]\vec{z}_0, \text{ soit}$$

$$\vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0) = C\dot{\phi}\vec{x}_2 + [A\dot{\beta} - M\ell\dot{\lambda}\sin(\alpha - \beta) + M\ell^2\dot{\alpha} + M\lambda^2\dot{\beta} + M\ell\lambda(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos(\alpha - \beta)]\vec{z}_0, \text{ ou encore}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = [M\ell^2 + M\ell\lambda\cos(\alpha - \beta)]\dot{\alpha} + [A + M\lambda^2 + M\ell\lambda\cos(\alpha - \beta)]\dot{\beta} - M\ell\dot{\lambda}\sin(\alpha - \beta)}.$$

\* **Calcul de  $\vec{\sigma}(A, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$**

D'après le théorème de Koenig I, on a :

$$\vec{\sigma}(A, S_2/\mathcal{R}_0) = J(S_2; A)\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) + m_2\vec{AG}_2 \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R}_0).$$

\* La base  $B_2$  étant principal d'inertie pour le solide  $S_2$ , l'expression de la matrice

$$\text{d'inertie de } S_2 \text{ en } A \text{ est donnée par la forme suivante } J(S_2; A) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}_{B_2}. \text{ Le}$$

vecteur rotation instantanée de  $S_2$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est donné par  $\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) = \dot{\beta}\vec{z}_0$ . D'où

$$J(S_2; A)\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) = I_2\dot{\beta}\vec{z}_0.$$

\*  $\overrightarrow{OA} = \ell \vec{x}_1$ , d'où par dérivation par rapport au temps dans  $\mathcal{R}_0$

$$\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) = \frac{d(\ell \vec{x}_1)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \ell \dot{\alpha} \vec{y}_1 = -\ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \vec{y}_2. \text{ Posons } \overrightarrow{AG_2} = c \vec{z}_0, \text{ alors}$$

$$m_2 \overrightarrow{AG_2} \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R}_0) = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}_{B_2} \wedge \begin{bmatrix} -\ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} -c \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\ c \ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2}.$$

$$\text{Finalement } \boxed{\vec{\sigma}(A, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_2 \dot{\beta}}.$$

\* **Calcul de  $\vec{\sigma}(O, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$**

La relation de distribution du torseur cinétique du mouvement de  $S_2$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  permet d'écrire:  $\vec{\sigma}(O, S_2/\mathcal{R}_0) = \vec{\sigma}(A, S_2/\mathcal{R}_0) + m_2 \vec{v}(G_2/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{AO}$ .

$$* \overrightarrow{AO} = -\ell \vec{x}_1 = -\ell \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 - \ell \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2.$$

\*  $\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2} = \ell \vec{x}_1 + \overrightarrow{AG_2}$ , d'où par dérivation par rapport au temps dans  $\mathcal{R}_0$

$$\vec{v}(G_2/\mathcal{R}_0) = \frac{d(\ell \vec{x}_1 + \overrightarrow{AG_2})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \ell \dot{\alpha} \vec{y}_1 = -\ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \vec{y}_2.$$

$$\text{Par suite } m_2 \vec{v}(G_2/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{AO} = m_2 \begin{bmatrix} -\ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \wedge \begin{bmatrix} -\ell \cos(\alpha - \beta) \\ -\ell \sin(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2}, \text{ soit}$$

$$m_2 \vec{v}(G_2/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{AO} = m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell^2 \dot{\alpha} \sin^2(\alpha - \beta) + \ell^2 \dot{\alpha} \cos^2(\alpha - \beta) \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 \ell^2 \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{B_2}. \text{ Finalement, il vient :}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_2 \dot{\beta} + m_2 \ell^2 \dot{\alpha}}.$$

\* **Calcul de  $\vec{\sigma}(O, S_1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$**

D'après le théorème de Koenig I, on a :

$\vec{\sigma}(O, S_1/\mathcal{R}_0) = J(S_1; O) \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) + m_1 \overrightarrow{OG_1} \wedge \vec{v}(O/\mathcal{R}_0)$ . La matrice d'inertie du solide  $S_1$  par rapport à  $O$  exprimée dans la base de  $\mathcal{R}_0$  admet la forme générale suivante :

$$J(S_1; O) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & I_1 \end{bmatrix}_{B_0}. \text{ Le vecteur rotation instantanée de } S_1 \text{ par rapport à } \mathcal{R}_0$$

est :  $\vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) = \dot{\alpha} \vec{z}_0$ . D'où

$$\vec{\sigma}(O, S_1/\mathcal{R}_0) = J(S_1; O) \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & I_1 \end{bmatrix}_{B_0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{B_0} = \begin{bmatrix} -E_1 \dot{\alpha} \\ -D_1 \dot{\alpha} \\ I_1 \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{B_0}, \text{ soit}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O, S_1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_1 \dot{\alpha}}.$$

## 2) \*Calcul de $2T(S_1/\mathcal{R}_0)$

D'après le troisième théorème de Koenig appliqué en O pour le système  $S_1$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , on a :

$$2T(S_1/\mathcal{R}_0) = m_1 \|\vec{v}(O/\mathcal{R}_0)\|^2 + \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) \cdot \mathbf{J}(S_1; O) \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) + m_1 \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) \cdot [\overrightarrow{AG_1} \wedge \vec{v}(O/\mathcal{R}_0)].$$

Vu que  $\vec{v}(O/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$ , il vient :  $2T(S_1/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) \cdot \mathbf{J}(S_1; O) \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{B_0} \cdot \begin{bmatrix} -E_1 \dot{\alpha} \\ -D_1 \dot{\alpha} \\ I_1 \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{B_0},$

soit  $\boxed{2T(S_1/\mathcal{R}_0) = I_1 \dot{\alpha}^2}.$

## \*Calcul de $2T(S_2/\mathcal{R}_0)$

On choisira le point A pour le système  $S_2$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  avant d'appliquer Koenig III. Il vient alors :

$$2T(S_2/\mathcal{R}_0) = m_2 \|\vec{v}(A/\mathcal{R}_0)\|^2 + \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \mathbf{J}(S_2; A) \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) + m_2 \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) \cdot [\overrightarrow{AG_2} \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R}_0)].$$

D'après la question 1), on a :  $\mathbf{J}(S_2; A) \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) = I_2 \dot{\beta} \vec{z}_0$  (c'est d'ailleurs ça qui justifie le choix du point A), et comme  $\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) = \dot{\beta} \vec{z}_0$ , le terme de rotation s'écrit :

$$\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \mathbf{J}(S_2; A) \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) = I_2 \dot{\beta}^2.$$

Utilisant maintenant  $\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) = -\ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \vec{y}_2$ , le terme de translation devient :  $m_2 \|\vec{v}(A/\mathcal{R}_0)\|^2 = m_2 \ell^2 \dot{\alpha}^2$ . Comme  $\overrightarrow{AG_2}$  est dirigé par  $\vec{z}_0$ , de même que  $\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0)$  et que le produit vectoriel est orthogonal aux deux vecteurs qui le composent, le terme  $m_2 \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_0) \cdot [\overrightarrow{AG_2} \wedge \vec{v}(A/\mathcal{R}_0)] = 0$ . D'où  $\boxed{2T(S_2/\mathcal{R}_0) = I_2 \dot{\beta}^2 + m_2 \ell^2 \dot{\alpha}^2}.$

## \*Calcul de $2T(S/\mathcal{R}_0)$

Pour le solide S, il n'y a pas de point remarquable qui pourrait être choisi pour appliquer Koenig III mis-à-part le centre d'inertie G qui permet d'annuler d'office le dernier terme :

$$2T(S/\mathcal{R}_0) = M \|\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)\|^2 + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \cdot \mathbf{J}(S; G) \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) + M \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \cdot [\overrightarrow{GG} \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R}_0)].$$

Avec  $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = [\dot{\lambda} - \ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)] \vec{x}_2 + [\lambda \dot{\beta} + \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta)] \vec{y}_2$  (question 1), il vient :

$$M \|\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)\|^2 = M \dot{\lambda}^2 + M \lambda^2 \dot{\beta}^2 + M \ell^2 \dot{\alpha}^2 + 2M \ell \lambda \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - 2M \ell \dot{\alpha} \dot{\lambda} \sin(\alpha - \beta). \text{ Par ailleurs,}$$

$$\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \cdot \mathbf{J}(S; G) \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}_{B_2} \cdot \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{B_2} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}_{B_2} = C \dot{\phi}^2 + A \dot{\beta}^2. \text{ D'où}$$

$$\boxed{2T(S/\mathcal{R}_0) = C \dot{\phi}^2 + (A + M \lambda^2) \dot{\beta}^2 + M \dot{\lambda}^2 + M \ell^2 \dot{\alpha}^2 + 2M \ell \lambda \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - 2M \ell \dot{\alpha} \dot{\lambda} \sin(\alpha - \beta)}.$$

## 3) \*Calcul de $\vec{\delta}(A, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$

On utilise le deuxième théorème de Koenig qui a l'avantage de pouvoir s'appliquer en n'importe quel point. Ainsi  $\vec{\delta}(A, S_2/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A, S_2/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + m_2 \vec{v}(A/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v}(G_2/\mathcal{R}_0)$ . Sans

faire de calcul il est évident que  $\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) = \vec{v}(G_0/\mathcal{R}_0)$ , ce qui donne

$$\vec{\delta}(A, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d(I_2 \dot{\beta})}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}, \text{ soit } \boxed{\vec{\delta}(A, S_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_2 \ddot{\beta}}.$$

**\*Calcul de  $\vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$**

C'est bien sûr Koenig II qu'il convient d'appliquer au point A pour le mouvement de

$$S/\mathcal{R}_0, \text{ soit } \boxed{\vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + M\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R}_0)}.$$

\* Calculons pour cela  $\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$  à partir de la relation de distribution du torseur cinétique du mouvement de  $S/\mathcal{R}_0$ . On a alors:

$$\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + [M\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OA}] \cdot \vec{z}_0. \text{ Avec les résultats de la première}$$

question :  $\overrightarrow{OA} = \ell \cos(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \ell \sin(\alpha - \beta) \vec{y}_2$ ,

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = [\dot{\lambda} - \ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)] \vec{x}_2 + [\lambda \dot{\beta} + \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta)] \vec{y}_2 \text{ et}$$

$$\vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = [M\ell^2 + M\ell\lambda \cos(\alpha - \beta)] \dot{\alpha} + [A + M\lambda^2 + M\ell\lambda \cos(\alpha - \beta)] \dot{\beta} - M\ell\dot{\lambda} \sin(\alpha - \beta), \text{ il}$$

$$\text{vient : } \vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + M \left( \begin{bmatrix} \dot{\lambda} - \ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ \lambda \dot{\beta} + \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \wedge \begin{bmatrix} \ell \cos(\alpha - \beta) \\ \ell \sin(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \right) \cdot \vec{z}_0, \text{ soit}$$

$$\text{après calcul : } \vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = (A + M\lambda^2) \dot{\beta} + M\ell\lambda \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta).$$

\* Calculons maintenant le deuxième terme du second membre de Koenig II, avec  $\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) = -\ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \vec{x}_2 + \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \vec{y}_2$  et l'expression ci-dessus de  $\vec{v}(G/\mathcal{R}_0)$ , il vient

$$M\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = M \begin{bmatrix} -\ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \wedge \begin{bmatrix} \dot{\lambda} - \ell \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) \\ \lambda \dot{\beta} + \ell \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2}, \text{ soit}$$

$$M\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) = [-M\ell\lambda \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - M\ell \dot{\alpha} \dot{\lambda} \cos(\alpha - \beta)] \vec{z}_0.$$

$$\text{D'où } \vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \left. \frac{d[\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0]}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + [M\vec{v}(A/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R}_0)] \cdot \vec{z}_0, \text{ soit}$$

$$\boxed{\vec{\delta}(A, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = (A + M\lambda^2) \ddot{\beta} + 2M\lambda \dot{\lambda} \dot{\beta} + M\ell\lambda \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - M\ell\dot{\lambda} \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)}.$$

**\*Calcul de  $\vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{x}_2$**

Par application de Koenig II, il vient :  $\boxed{\vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}}$ . D'après la question 1),

$$\text{on a : } \vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0) = C\dot{\phi} \vec{x}_2 + A\dot{\beta} \vec{z}_0. \text{ D'où } \vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d(C\dot{\phi} \vec{x}_2 + A\dot{\beta} \vec{z}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = C\ddot{\phi} \vec{x}_2 + C\dot{\phi} \dot{\beta} \vec{y}_2 + A\ddot{\beta} \vec{z}_0,$$

$$\text{ce qui donne } \boxed{\vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{x}_2 = C\ddot{\phi}}.$$

**\*Calcul de  $\bar{\delta}(O, \Sigma / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$**

O est un point fixe et  $\bar{\delta}(O, \Sigma / \mathcal{R}_0) = \bar{\delta}(O, S_1 / \mathcal{R}_0) + \bar{\delta}(O, S_2 / \mathcal{R}_0) + \bar{\delta}(O, S / \mathcal{R}_0)$ , l'application de Koenig II pour les trois solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S$  pris séparément montre que chacun des termes du second membre de la relation précédente s'obtient par dérivation par rapport au temps du moment cinétique du système considéré dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . Il vient alors puisque  $\vec{z}_0$  est constant :

$$\bar{\delta}(O, \Sigma / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \left. \frac{d[\bar{\sigma}(O, S_2 / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0]}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + \left. \frac{d[\bar{\sigma}(O, S_1 / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0]}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + \left. \frac{d[\bar{\sigma}(O, S / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0]}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}. \text{ Les trois}$$

moments cinétiques ont été calculés dans la première question, d'où

$$* \left. \frac{d[\bar{\sigma}(O, S_2 / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0]}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d(I_1 \dot{\alpha})}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = I_1 \ddot{\alpha}$$

$$* \left. \frac{d[\bar{\sigma}(O, S_1 / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0]}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d(I_2 \dot{\beta} + m_2 \ell^2 \dot{\alpha})}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = I_2 \ddot{\beta} + m_2 \ell^2 \ddot{\alpha}$$

$$* \left. \frac{d[\bar{\sigma}(O, S / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0]}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\{[M\ell^2 + M\ell\lambda \cos(\alpha - \beta)]\dot{\alpha} + [A + M\lambda^2 + M\ell\lambda \cos(\alpha - \beta)]\dot{\beta} - M\ell\dot{\lambda} \sin(\alpha - \beta)\}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

soit après calcul

$$\left. \frac{d[\bar{\sigma}(O, S / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0]}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = [M\ell^2 + M\ell\lambda \cos(\alpha - \beta)]\ddot{\alpha} + [A + M\lambda^2 + M\ell\lambda \cos(\alpha - \beta)]\ddot{\beta} - M\ell\ddot{\lambda} \sin(\alpha - \beta) - M\ell\lambda(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) \sin(\alpha - \beta) + 2M[\lambda\dot{\lambda} + \ell\dot{\lambda} \cos(\alpha - \beta)]\dot{\beta}$$

Finalement,

$$\boxed{\bar{\delta}(O, \Sigma / \mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = [I_1 + (M + m_2)\ell^2 + M\ell\lambda \cos(\alpha - \beta)]\ddot{\alpha} + [I_2 + A + M\lambda^2 + M\ell\lambda \cos(\alpha - \beta)]\ddot{\beta} - M\ell\ddot{\lambda} \sin(\alpha - \beta) - M\ell\lambda(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) \sin(\alpha - \beta) + 2M[\lambda\dot{\lambda} + \ell\dot{\lambda} \cos(\alpha - \beta)]\dot{\beta}}$$

**Remarque importante :**

*La cinétique est gouvernée par les trois théorèmes de Koenig (parties mises en jaune dans le corrigé). On peut dire, comme son nom l'indique en allemand (bien qu'il soit hongrois), que c'est le roi de la mécanique du solide indéformable. Il suffit donc de savoir comment appliquer ces trois théorèmes. En général on cherchera un point fixe ou bien le centre d'inertie pour les théorèmes I et III, alors que le théorème II est valable pour un point géométrique quelconque. Le reste sera un simple calcul si on sait comment le faire !*

**Module Physique 6**  
**Mécanique du solide indéformable**  
**Série N°5**

Soit le repère absolu  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  où l'axe  $O_0\vec{z}_0$  est orienté suivant la verticale ascendante. On note  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur. On considère le système  $\Sigma$  formé par:

- un disque (D) homogène d'axe  $O_0\vec{z}_0$ , de masse  $m_0$  auquel est fixé un support de masse négligeable (voir figure). Le disque tourne sans frottement autour de  $O_0\vec{z}_0$  (liaison rotoïde parfaite d'axe  $O_0\vec{z}_0$ ).

- Une toupie (T) de révolution, de masse  $m_1$ , de centre O, mobile autour d'un axe vertical AB invariablement lié au disque (D) (liaison rotoïde d'axe  $A\vec{z}_0$ ).

On désigne par  $I_0$  le moment d'inertie du disque par rapport à  $O_0\vec{z}_0$  et par  $I_1$  celui de la toupie par rapport à AB. Soit le repère  $\mathcal{R}_0(O_0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} = \vec{z}_0)$  lié au disque tel que l'axe  $O_0\vec{x}$  passe par le point A.

On pose  $\vec{O_0A} = a\vec{x}$  et  $\vec{OA} = -\vec{OB} = -b\vec{z}$  (a et b sont des constantes positives).

Compte tenu des liaisons, la position du système  $\Sigma$  est complètement déterminée par la connaissance des deux angles suivants :  $\theta_0 = (O_0\vec{x}_0, O_0\vec{x})$  et  $\theta_1 = (O_0\vec{x}_0, \vec{OP})$  où  $\vec{OP}$  est un rayon horizontal de la toupie et lié à celle-ci.

Les actions de l'axe  $O_0\vec{z}_0$  sur le disque sont représentées au point  $O_0$  par le torseur  $\Gamma_0$  de résultante  $\vec{R}_0 = X_0\vec{x} + Y_0\vec{y} + Z_0\vec{z}_0$  et de moment, orthogonal à  $O_0\vec{z}_0$ ,  $\vec{M}_0(O_0) = \mu_1\vec{x} + \mu_2\vec{y}$ .

Les actions exercées par le disque (D) sur la toupie (T) en A (respectivement en B) sont représentées par le torseur  $\Gamma_A$  (respectivement  $\Gamma_B$ ) dont les éléments de réduction au point A (respectivement au point B) sont  $\vec{R}_A = X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} + Z_A\vec{z}_0$  (respectivement  $\vec{R}_B = X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} + Z_B\vec{z}_0$ ) et  $\vec{M}_A(A)$  (respectivement  $\vec{M}_B(B)$ ).

On suppose que  $\vec{M}_A(A) = \vec{M}_B(B) = \frac{C}{2}(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1)\vec{z}_0$  (C est une constante positive ou nulle).

On étudie le mouvement du système  $\Sigma$  pour les conditions initiales suivantes :

$\theta_0(0) = \theta_1(0) = 0$  ;  $\dot{\theta}_0(0) = 0$  et  $\dot{\theta}_1(0) = \omega_1 > 0$ .

Toutes les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ .

1) Déterminer par ces éléments de réduction en O le torseur cinétique de la toupie (T) par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

2) Déterminer par ses éléments de réduction en  $O_0$  le torseur cinétique du système  $\Sigma$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

3) En appliquant le théorème du moment cinétique à la toupie (T) par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , montrer que :  $I_1 \ddot{\theta}_1 = C(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1)$  ;  $X_A = X_B$  et  $Y_A = Y_B$ .

4) Appliquer le théorème du moment cinétique à  $\Sigma$  au point  $O_0$  et montrer que :

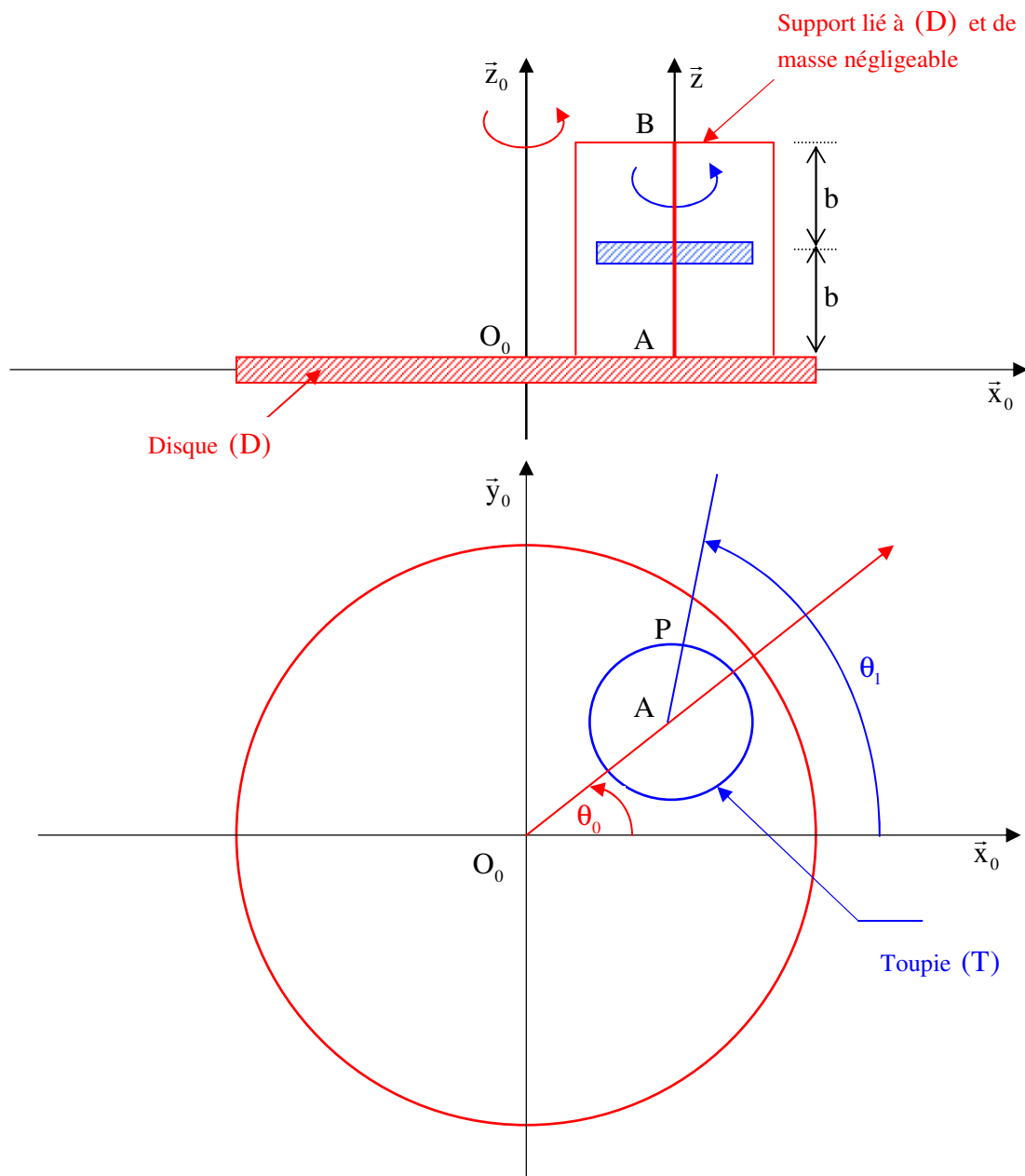
$$\mu_1 = -m_1 a b \ddot{\theta}_0 ; \mu_2 = -m_1 a (g + b \dot{\theta}_0^2) \text{ et } (I_0 + m_1 a^2) \dot{\theta}_0 + I_1 \dot{\theta}_1 = I_1 \omega_1.$$

5) Déterminer, en fonction du temps  $t$ ,  $\dot{\theta}_0(t)$  et  $\dot{\theta}_1(t)$ , les représenter graphiquement.

On posera  $\lambda = \frac{I_1}{I_0 + m_1 a^2}$ .

6) Calculer, dans  $\mathcal{R}_0$ , l'énergie cinétique du système  $\Sigma$ .

7) Montrer que le travail des efforts intérieurs entre les instants  $t=0$  et  $t=+\infty$  s'écrit :  $(W_{\text{int}})_{0 \rightarrow \infty} = -\frac{I_1 \omega_1^2}{2(\lambda + 1)}$ .



**Module Physique 6**  
**TD de mécanique du solide indéformable**  
**Corrigé de la série N°5**

**1) Torseur cinétique de T par rapport à  $\mathcal{R}_0$  réduit au point O**

On a :  $\tau_{\sigma}(T/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} m_1 \vec{v}(O/\mathcal{R}_0) \\ \vec{\sigma}(O, T/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix}_O$ .

\*  $\vec{O_0O} = \vec{O_0A} + \vec{AO} = a\vec{x} + b\vec{z} \Rightarrow \vec{v}(O/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{O_0O}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d(a\vec{x})}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = a\dot{\theta}_0 \vec{y}, \quad \text{d'où}$

$m_1 \vec{v}(O/\mathcal{R}_0) = m_1 a \dot{\theta}_0 \vec{y}.$

\* D'après le premier théorème de Koenig, on a :  $\vec{\sigma}(O, T/\mathcal{R}_0) = J(T; O) \vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0) + m \vec{OO} \wedge \vec{v}(O/\mathcal{R}_0), \text{ d'où } \vec{\sigma}(O, T/\mathcal{R}_0) = I_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}.$

**2) Torseur cinétique de  $\Sigma$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  réduit au point  $O_0$**

On a :  $\tau_{\sigma}(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} \vec{R}_{\sigma} \\ \vec{\sigma}(O_0, \Sigma/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix}_O, \quad \text{avec} \quad \vec{R}_{\sigma} = m_1 \vec{v}(O/\mathcal{R}_0) + m_0 \vec{v}(O_0/\mathcal{R}_0) \quad \text{et}$

$\vec{\sigma}(O_0, \Sigma/\mathcal{R}_0) = \vec{\sigma}(O_0, T/\mathcal{R}_0) + \vec{\sigma}(O_0, D/\mathcal{R}_0).$

\*  $\vec{v}(O_0/\mathcal{R}_0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_{\sigma} = m_1 \vec{v}(O/\mathcal{R}_0), \text{ soit } \vec{R}_{\sigma} = m_1 a \dot{\theta}_0 \vec{y}.$

\*  $\vec{\sigma}(O_0, T/\mathcal{R}_0) = \vec{\sigma}(O, T/\mathcal{R}_0) + m_1 \vec{v}(O/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{OO_0} = I_1 \dot{\theta}_1 \vec{z} + (m_1 a \dot{\theta}_0 \vec{y}) \wedge (-a\vec{x} - b\vec{z}), \text{ d'où}$   
 $\vec{\sigma}(O_0, T/\mathcal{R}_0) = -m_1 a b \dot{\theta}_0 \vec{x} + (I_1 \dot{\theta}_1 + m_1 a^2 \dot{\theta}_0) \vec{z}.$

\* Le premier théorème de Koenig appliqué au disque permet d'écrire :  $\vec{\sigma}(O_0, D/\mathcal{R}_0) = J(D; O_0) \vec{\Omega}(D/\mathcal{R}_0) + m \vec{O_0O_0} \wedge \vec{v}(O_0/\mathcal{R}_0), \text{ ce qui donne : } \vec{\sigma}(O_0, D/\mathcal{R}_0) = I_0 \dot{\theta}_0 \vec{z}.$

D'où  $\vec{\sigma}(O_0, \Sigma/\mathcal{R}_0) = -m_1 a b \dot{\theta}_0 \vec{x} + (I_1 \dot{\theta}_1 + m_1 a^2 \dot{\theta}_0) \vec{z} + I_0 \dot{\theta}_0 \vec{z}, \quad \text{soit}$

$\vec{\sigma}(O_0, \Sigma/\mathcal{R}_0) = -m_1 a b \dot{\theta}_0 \vec{x} + [(I_0 + m_1 a^2) \dot{\theta}_0 + I_1 \dot{\theta}_1] \vec{z}.$

**3) Application du théorème du moment cinétique à la Toupie dans  $\mathcal{R}_0$**

On a :  $\left. \frac{d\vec{\sigma}(O, T/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext} \rightarrow T}(O).$  Calculons le moment des forces extérieures agissant

sur la Toupie T en O.

\* On a :  $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext} \rightarrow T}(O) = \vec{\mathcal{M}}_{A \rightarrow T}(O) + \vec{\mathcal{M}}_{B \rightarrow T}(O) + \vec{\mathcal{M}}_{\text{Poids} \rightarrow T}(O) \text{ avec}$

$\vec{\mathcal{M}}_{A \rightarrow T}(O) = \vec{\mathcal{M}}_{A \rightarrow T}(A) + \vec{R}_A \wedge \vec{AO}, \quad \vec{\mathcal{M}}_{B \rightarrow T}(O) = \vec{\mathcal{M}}_{B \rightarrow T}(B) + \vec{R}_B \wedge \vec{BO} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_{\text{Poids} \rightarrow T}(O) = \vec{0}.$

$$\text{D'où } \vec{\mathcal{M}}_{A \rightarrow T}(O) = \vec{\mathcal{M}}_{A \rightarrow T}(A) + \vec{R}_A \wedge \overrightarrow{AO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C}{2}(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}_B \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} bY_A \\ -bX_A \\ \frac{C}{2}(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix}_B$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{B \rightarrow T}(O) = \vec{\mathcal{M}}_{B \rightarrow T}(B) + \vec{R}_B \wedge \overrightarrow{BO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C}{2}(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix}_B \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -bY_B \\ bX_B \\ \frac{C}{2}(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix}_B$$

$$\text{D'où } \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext} \rightarrow T}(O) = \begin{bmatrix} b(Y_A - Y_B) \\ b(X_B - X_A) \\ C(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) \end{bmatrix}_B.$$

$$* \quad \vec{\sigma}(O, T / \mathfrak{R}_0) = I_1 \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \Rightarrow \left. \frac{d\vec{\sigma}(O, \Sigma / \mathfrak{R}_0)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_0} = I_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z}$$

$$\text{D'où le système } \begin{cases} b(Y_A - Y_B) = 0 \\ b(X_B - X_A) = 0 \\ I_1 \ddot{\theta}_1 = C(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) \end{cases}, \text{ qui permet de montrer que : } \boxed{X_B = X_A}, \boxed{Y_B = Y_A} \text{ et}$$

$$\boxed{I_1 \ddot{\theta}_1 = C(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1)}.$$

#### 4) Application du théorème du moment cinétique au système $\Sigma$ dans $\mathfrak{R}_0$

On applique ce théorème au point  $O_0$ , soit

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(O, \Sigma / \mathfrak{R}_0)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_0} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(O_0).$$

\* Le bilan des moments des forces extérieures auxquels est soumis le système  $\Sigma$  est :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O_0 \rightarrow \Sigma}(O_0) = \mu_1 \vec{x} + \mu_2 \vec{y} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_{\text{Pesanteur} \rightarrow \Sigma}(O_0) = (-m_1 g \vec{z}) \wedge (\overrightarrow{OO_0}) = (m_1 g \vec{z}) \wedge (a \vec{x} + b \vec{z}) = m_1 a g \vec{y}.$$

$$\text{D'où } \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(O_0) = \mu_1 \vec{x} + (\mu_2 + m_1 a g) \vec{y}.$$

\* Avec  $\vec{\sigma}(O_0, \Sigma / \mathfrak{R}_0) = -m_1 a b \dot{\theta}_0 \vec{x} + (I_0 \dot{\theta}_0 + I_1 \dot{\theta}_1 - m_1 a^2 \dot{\theta}_0) \vec{z}$ , il vient

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(O, \Sigma / \mathfrak{R}_0)}{dt} \right|_{\mathfrak{R}_0} = -m_1 a b \ddot{\theta}_0 \vec{x} - m_1 a b \dot{\theta}_0^2 \vec{y} + [(I_0 + m_1 a^2) \ddot{\theta}_0 + I_1 \ddot{\theta}_1] \vec{z}. \text{ D'où}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 a b \ddot{\theta}_0 \\ -m_1 a b \dot{\theta}_0^2 \\ (I_0 + m_1 a^2) \ddot{\theta}_0 + I_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 + m_1 a g \\ 0 \end{bmatrix}_B, \quad \text{soit } \boxed{\mu_1 = -m_1 a b \ddot{\theta}_0}, \boxed{\mu_2 = -m_1 a (g + b \dot{\theta}_0^2)} \quad \text{et}$$

$$(I_0 + m_1 a^2) \ddot{\theta}_0 + I_1 \ddot{\theta}_1 = 0.$$

Par intégration par rapport au temps de la dernière équation, il vient :

$$(I_0 + m_1 a^2) \dot{\theta}_0 + I_1 \dot{\theta}_1 = (I_0 + m_1 a^2) \dot{\theta}_0(0) + I_1 \dot{\theta}_1(0), \text{ soit en utilisant les conditions initiales } \boxed{(I_0 + m_1 a^2) \dot{\theta}_0 + I_1 \dot{\theta}_1 = I_1 \omega_1}.$$

5) on peut réécrire l'équation  $(I_0 + m_1 a^2) \dot{\theta}_0 + I_1 \dot{\theta}_1 = I_1 \omega_1$  sous la forme :

$\dot{\theta}_0 + \frac{I_1}{I_0 + m_1 a^2} \dot{\theta}_1 = \frac{I_1}{I_0 + m_1 a^2} \omega_1$ , ce qui donne en posant  $\lambda = \frac{I_1}{I_0 + m_1 a^2}$  l'équation suivante:

$$\dot{\theta}_0 + \lambda \dot{\theta}_1 = \lambda \omega_1, \text{ d'où l'on tire } \boxed{\dot{\theta}_0 = \lambda \omega_1 - \lambda \dot{\theta}_1}.$$

Les deux inconnues  $\dot{\theta}_0$  et  $\dot{\theta}_1$  sont aussi reliées par l'équation  $I_1 \ddot{\theta}_1 = C(\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1)$  de la troisième question. En reportant l'expression de  $\dot{\theta}_0$  dans cette dernière équation, il

vient :  $I_1 \ddot{\theta}_1 = -C(1+\lambda) \dot{\theta}_1 + C\lambda \omega_1$ , soit  $\boxed{\ddot{\theta}_1 + \frac{C(1+\lambda)}{I_1} \dot{\theta}_1 = \frac{C\lambda}{I_1} \omega_1}$ . C'est une équation différentielle linéaire de premier ordre en l'inconnue  $\dot{\theta}_1$ .

\* La solution générale de l'équation homogène associée à cette équation s'écrit :

$$(\dot{\theta}_1)_0 = k \exp\left(-\frac{C(1+\lambda)}{I_1} t\right) \text{ où } k \text{ est une constante à déterminer.}$$

\* Une solution particulière est donnée par la constante :  $(\dot{\theta}_1)_p = \frac{\lambda}{1+\lambda} \omega_1$ .

D'où la solution générale qui prend la forme :  $\dot{\theta}_1 = (\dot{\theta}_1)_0 + (\dot{\theta}_1)_p = \frac{\lambda}{1+\lambda} \omega_1 + k \exp\left(-\frac{C(1+\lambda)}{I_1} t\right)$ .

Avec la condition initiale  $\dot{\theta}_1(0) = \omega_1$ , il vient  $\frac{\lambda}{1+\lambda} \omega_1 + k = \omega_1$ , soit  $k = \frac{1}{1+\lambda} \omega_1$ .

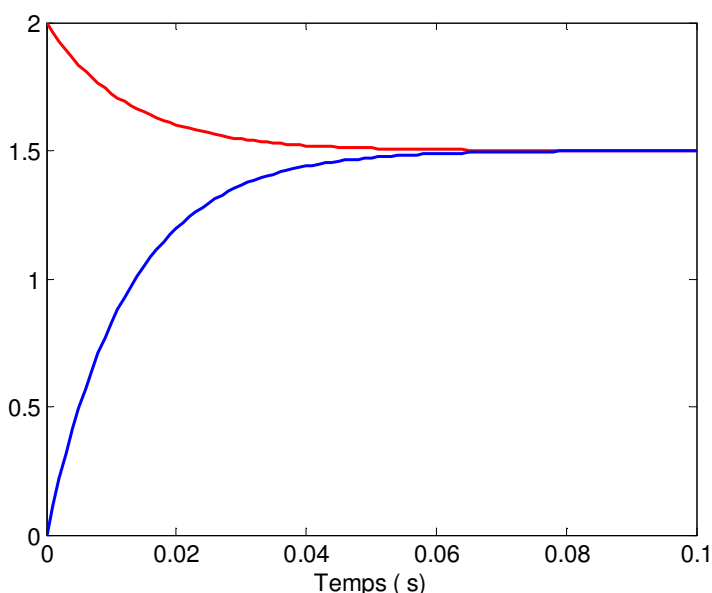
D'où  $\boxed{\dot{\theta}_1 = \frac{1}{1+\lambda} \omega_1 \left( \lambda + \exp\left(-\frac{C(1+\lambda)}{I_1} t\right) \right)}$  et par suite  $\dot{\theta}_0 = \lambda \omega_1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} \omega_1 \left( \lambda + \exp\left(-\frac{C(1+\lambda)}{I_1} t\right) \right)$ ,

soit  $\boxed{\dot{\theta}_0 = \frac{\lambda}{1+\lambda} \omega_1 \left( \exp\left(-\frac{C(1+\lambda)}{I_1} t\right) \right)}$ .

Les courbes sont tracées sous Matlab avec le jeu de paramètres :  $\omega = 2$ ,  $C = 2$  et  $\lambda = 3$ .

La courbe en rouge décrit l'évolution temporelle de  $\dot{\theta}_1$  et la courbe bleue celle de  $\dot{\theta}_0$ .

L'asymptote horizontale correspond à  $\frac{\lambda \omega_1}{1+\lambda} = 1.5$



6) La puissance des efforts qui agissent sur le système  $\Sigma$  est :

$$\mathcal{P}_{\text{total}} = \underbrace{\mathcal{P}_{O_0 \rightarrow \Sigma} + \mathcal{P}_{\text{Pesanteur} \rightarrow \Sigma}}_{\text{externe}} + \underbrace{\mathcal{P}_A + \mathcal{P}_B}_{\text{interne}}.$$

$$* \mathcal{P}_{O_0 \rightarrow \Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(D/\mathcal{R}_0) \\ \vec{v}(O_0/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{R}_0 \\ \vec{M}_0(O_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \vec{x} + Y_0 \vec{y} + Z_0 \vec{z} \\ \mu_1 \vec{x} + \mu_2 \vec{y} \end{bmatrix} = 0.$$

$$* \mathcal{P}_{\text{Pesanteur} \rightarrow \Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(D/\mathcal{R}_0) \\ \vec{v}(O_0/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -m_0 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0) \\ \vec{v}(O/\mathcal{R}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -m_1 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -m_0 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -m_1 g \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} = 0.$$

$$* \mathcal{P}_A = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(T/D) \\ \vec{v}(A \in T/D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{R}_A \\ \vec{M}_A(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0) \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ \frac{C}{2} (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) \vec{z} \end{bmatrix} = -\frac{C}{2} (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1)^2.$$

$$* \mathcal{P}_B = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(T/D) \\ \vec{v}(B \in T/D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{R}_B \\ \vec{M}_B(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0) \vec{z} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z} \\ \frac{C}{2} (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) \vec{z} \end{bmatrix} = -\frac{C}{2} (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1)^2.$$

$$\text{D'où } \boxed{\mathcal{P}_{\text{total}} = -C (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1)^2}.$$

### 7) Energie cinétique de $\Sigma$ par rapport à $\mathcal{R}_0$

On a :  $2E_c(\Sigma/\mathcal{R}_0) = 2E_c(T/\mathcal{R}_0) + 2E_c(D/\mathcal{R}_0)$ .

\*  $2E_c(T/\mathcal{R}_0) = m_1 \|\vec{v}(O/\mathcal{R}_0)\|^2 + \vec{\Omega}(T/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{\sigma}(O, T/\mathcal{R}_0)$ , soit d'après la première question :

$$2E_c(T/\mathcal{R}_0) = m_1 a^2 \dot{\theta}_0^2 + I_1 \dot{\theta}_1^2.$$

$$* 2E_c(D/\mathcal{R}_0) = I_0 \dot{\theta}_0^2.$$

$$\text{D'où } \boxed{2E_c(\Sigma/\mathcal{R}_0) = (I_0 + m_1 a^2) \dot{\theta}_0^2 + I_1 \dot{\theta}_1^2}.$$

### 8) Travail des forces intérieures entre les instants $t=0$ et $t=+\infty$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :  $\frac{dE_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{dt} = \mathcal{P}_{\text{total}}$ , soit

$$\frac{dE_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{dt} = \frac{d\mathcal{W}_{\text{int}}}{dt}.$$

$$\text{D'où } (W_{\text{int}})_{0 \rightarrow \infty} = E_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)(t=\infty) - E_c(\Sigma/\mathcal{R}_0)(t=0) = \frac{\lambda^2 \omega_1^2}{2(1+\lambda)^2} (I_0 + I_1 + m_1 a^2) - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2. \quad \text{En}$$

$$\text{utilisant } I_0 + m_1 a^2 = \frac{I_1}{\lambda}, \text{ il vient } (W_{\text{int}})_{0 \rightarrow \infty} = \frac{\lambda^2 \omega_1^2}{2(1+\lambda)^2} \left( \frac{(1+\lambda) I_1}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{\lambda I_1 \omega_1^2}{2(1+\lambda)} - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2, \text{ soit}$$

$$\boxed{(W_{\text{int}})_{0 \rightarrow \infty} = -\frac{I_1 \omega_1^2}{2(1+\lambda)}}.$$