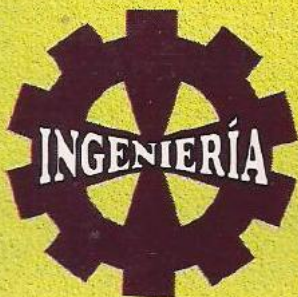


RELACIONES Y FUNCIONES II

Teoría y Problemas



ÁLGEBRA

Editorial
CUZCAN

ARMANDO QUISPE PAUYA

ÍNDICE

CAPÍTULO 4 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

	Pág
Propiedades para la elaboración de la gráfica de una función	7
Traslación horizontal	7
Traslación vertical	8
Simetrización con respecto al eje Y	10
Simetrización con respecto al eje X	11
Estiramiento o dilatación con respecto al eje Y	11
Encogimiento o contracción con respecto al eje Y	12
Estiramiento o dilatación con respecto al eje X	13
Encogimiento o contracción con respecto al eje X	14

CAPÍTULO 5 FUNCIONES POLINOMIALES

Función polinomial de grado n	16
Raíces reales de una función polinomial	16
Derivada de una función	18
Tangente a la gráfica de una función en un punto	19
Máximos y mínimos de una función polinomial	19
Puntos de inflexión en la gráfica de una función polinomial	22
La función cuadrática	28
La función cúbica	32

CAPÍTULO 6 ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Igualdad de funciones	40
Operaciones algebraicas con funciones	40
Composición de funciones	45

CAPÍTULO 7 CLASES DE FUNCIONES

Función Par, Función Impar, Función Periódica	52
Funciones Monótonas, Función Creciente, Función Decreciente, Función No Creciente, Función No Decreciente	63
Función Inyectiva, Función Suryectiva, Función Biyectiva, Aplicación	71
Función Continua	72
Cálculo del rango de una Función Inyectiva y Continua	72

CAPÍTULO 8 FUNCIÓN INVERSA

Función Inversa : definición , gráfica de una función inversa	75
Propiedades de las funciones inversas	81
PROBLEMAS RESUELTOS	82
SOLUCIONARIO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS	103
PROBLEMAS PROPUESTOS	172
CLAVES	191



GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

PROPIEDADES PARA LA ELABORACIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Conociendo la gráfica cartesiana de una función, es posible elaborar la gráfica de otra función con características similares a la primera. Por lo general, a partir de la gráfica de una función elemental, puede obtenerse la de otra función, mediante propiedades de TRASLACIÓN, SIMETRIZACIÓN, ESTIRAMIENTO (DILATACIÓN), ENCOGIMIENTO (CONTRACCIÓN), etc.

Sea F una función cuyas regla de correspondencia $y = F(x)$ y gráfica (Fig. 114- a) se conocen, entonces a partir de ésta se tiene que :

1. TRASLACIÓN HORIZONTAL

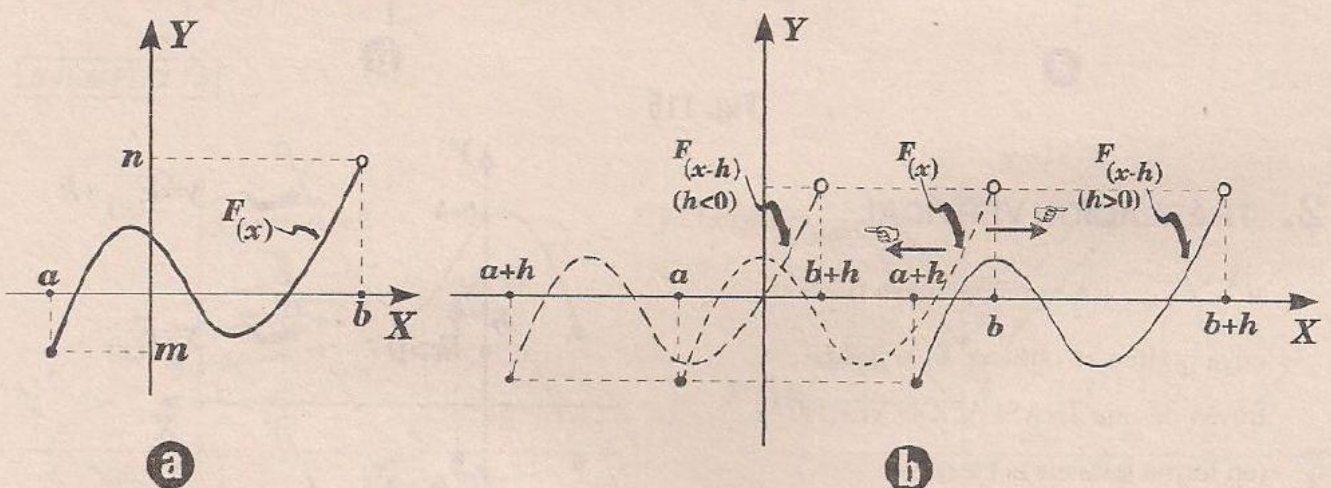


Fig. 114

$y = F(x-h)$ es una nueva función cuya gráfica se obtiene a partir de la de F mediante una TRASLACIÓN HORIZONTAL (en forma paralela al eje X) :

* Hacia la DERECHA , si $h > 0$

* Hacia la IZQUIERDA , si $h < 0$

Observe que en la Fig. (114-b) se ha tomado un punto de referencia de abscisa a para visualizar la traslación horizontal, cuando en realidad éste y todos los puntos que conforman la gráfica de F están afectados de ésta traslación.

OBSERVACIÓN

Si: $G_{(x)} = F_{(x-h)} \wedge \text{Dom}(F) = [a; b>$, entonces :

$$\text{Dom}(G) = [a+h; b+h> \wedge \text{Ran}(G) = \text{Ran}(F)$$

(4.1)

Estamos suponiendo que $\text{Dom}(F) = [a; b>$. Si el dominio fuese otro intervalo, ocurre algo similar.

EJEMPLO 71

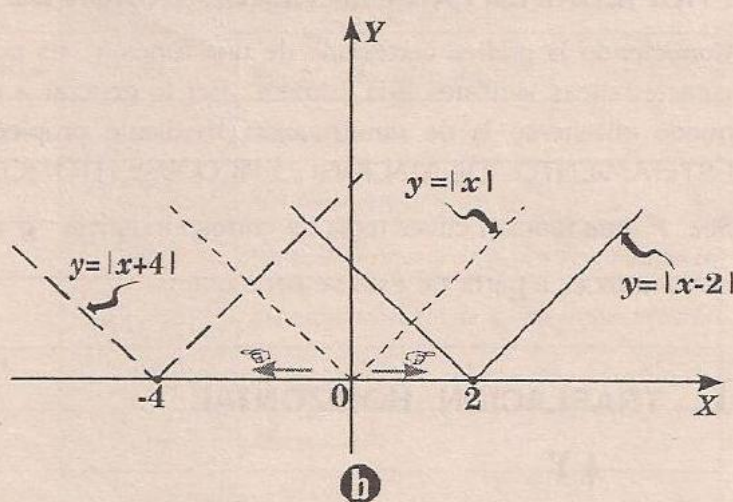
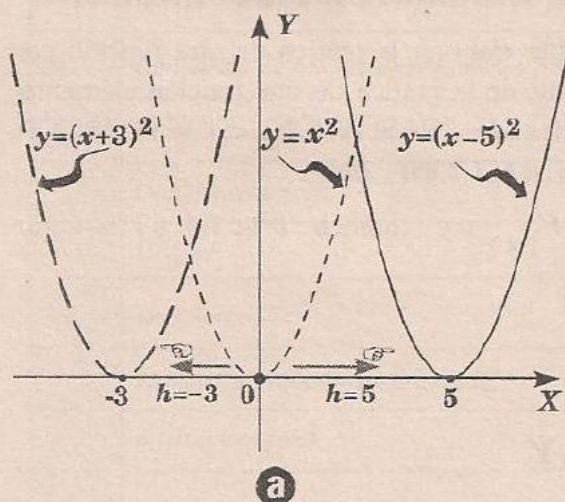


Fig. 115

2. TRASLACIÓN VERTICAL

$y = F_{(x)} + k$ es una nueva función, cuya gráfica se obtiene de la de F , a través de una TRASLACIÓN VERTICAL (en forma paralela al eje Y)

* Hacia ARRIBA , si $k > 0$

* Hacia ABAJO , si $k < 0$.

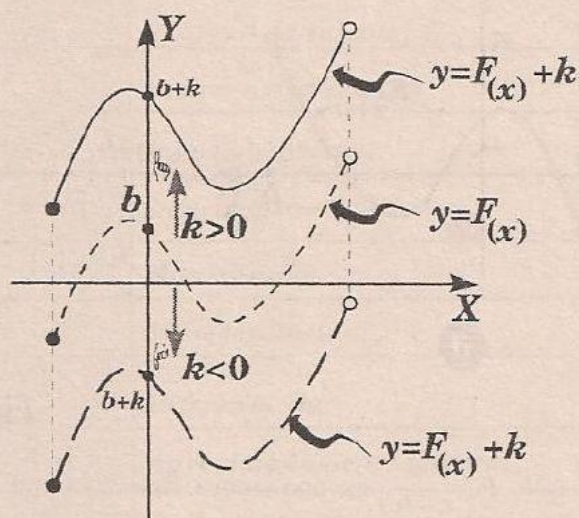


Fig. 116

4. SIMETRIZACIÓN CON RESPECTO AL EJE X

$y = -F_{(x)}$ es una nueva función
cuya gráfica se obtiene simetrizando
la de F con respecto al eje X .

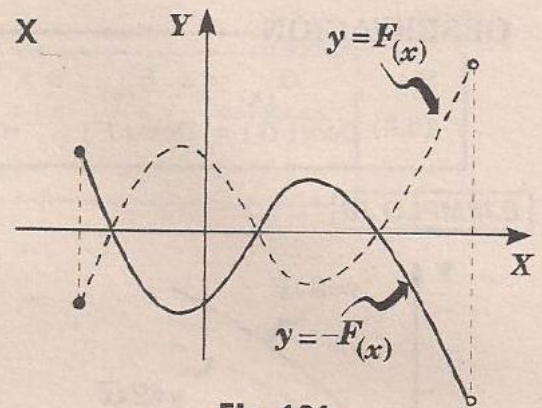


Fig. 121

OBSERVACIÓN

Si: $G_{(x)} = -F_{(x)} \wedge \text{Ran}(F) = [m; n]$, entonces:

$$\text{Dom}(G) = \text{Dom}(F) \wedge \text{Ran}(G) = [-n; -m]$$

Análogamente, también ocurre lo mismo si el rango de F fuera otro intervalo.

(4.4)

EJEMPLO 75

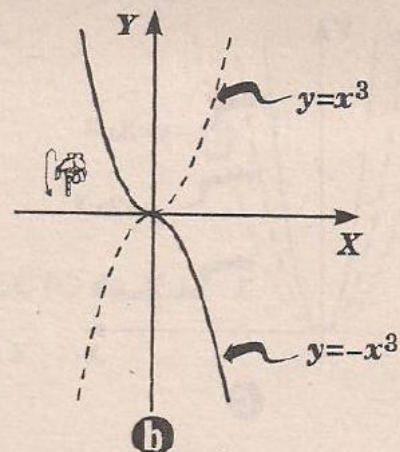
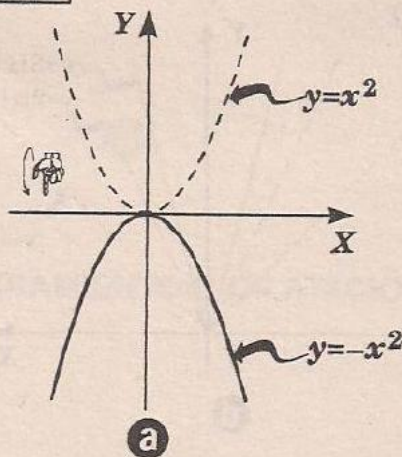


Fig. 122

5. ESTIRAMIENTO O DILATACIÓN CON RESPECTO AL EJE Y

$y = a \cdot F_{(x)}$; $a > 1$ es una nueva
función cuya gráfica es estirada a lo largo
del eje Y con relación a la gráfica de F .

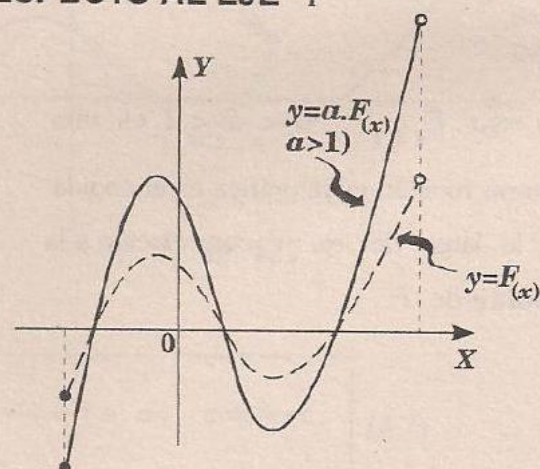


Fig. 123



FUNCIONES POLINOMIALES

FUNCIÓN POLINOMIAL DE GRADO n

La función polinomial es aquella de la forma $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que se define así :

$$F_{(x)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (5.1)$$

donde : n , grado de la función polinomial ($n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$)

$a_0; a_1; a_2; a_3; \dots; a_{n-1}; a_n$ son coeficientes

a_0 se llama COEFICIENTE PRINCIPAL ($a_0 \neq 0$)

a_n se llama TÉRMINO INDEPENDIENTE

Siendo algunos casos particulares de ésta y con coeficientes adecuados, los siguientes :

Para $n = 0$: $F_{(x)} = c$ (FUNCIÓN CONSTANTE)

para $n = 1$: $F_{(x)} = ax + b$ (FUNCIÓN LINEAL)

para $n = 2$: $F_{(x)} = ax^2 + bx + c$ (FUNCIÓN CUADRÁTICA)

para $n = 3$: $F_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (FUNCIÓN CÚBICA)

de la cuales, la función constante y la función lineal han sido detalladas anteriormente (ver los detalles en la parte I)

Antes de realizar el estudio de la función cuadrática y la función cúbica, con el propósito de facilitar ésta tarea, indicaremos algunos conceptos y definiciones previas que se hacen necesarias en esta parte.

RAÍCES REALES DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Sea $y = F_{(x)}$ una función polinomial n ($n \in \mathbb{Z}^+$). Si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que : $F_{(c)} = 0$, entonces se dice que c es una RAÍZ REAL de F



ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Antes de definir las operaciones algebraicas que se pueden efectuar con las funciones, definamos previamente la igualdad entre funciones.

IGUALDAD DE FUNCIONES

Dos funciones F y G son iguales si y solo si sus reglas de correspondencia y sus dominios son respectivamente iguales

$$F = G \Leftrightarrow F_{(x)} = G_{(x)} \wedge \text{Dom}(F) = \text{Dom}(G)$$

EJEMPLO 98

Las funciones F y G definidas por :

$$F_{(x)} = 4 - |x| \quad \text{y} \quad G_{(x)} = 4 - |x| \quad \wedge \quad \text{Dom}(G) = \langle -4; 4 \rangle$$

no son iguales, pues sus dominios son distintos ($\text{Dom}(F) = \mathbb{R}$), a pesar de tener la misma regla de correspondencia.

Las funciones M y N definidas por :

$$M_{(x)} = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad \text{y} \quad N_{(x)} = x - 2$$

Tampoco son iguales, porque los dominios implícitos en cada caso son : $\text{Dom}(M) = \mathbb{R} - \{-2\}$ y $\text{Dom}(N) = \mathbb{R}$ y estos son distintos.

Las funciones P y Q definidas por :

$$P_{(x)} = |x| \quad \text{y} \quad Q_{(x)} = x \cdot \text{sgn}(x)$$

Si son iguales, pues sus reglas de correspondencia por (3.11), son iguales y sus dominios también son iguales : $\text{Dom}(P) = \text{Dom}(Q) = \mathbb{R}$

Consideremos ahora dos funciones cualesquiera F y G definidas así :

$$y = F_{(x)} \wedge x \in \text{Dom}(F) \quad ; \quad y = G_{(x)} \wedge x \in \text{Dom}(G)$$

tales que : $\text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G) \neq \emptyset$, entonces se dice que es posible definir y efectuar operaciones algebraicas con ambas funciones de la siguiente manera :

- * **ADICIÓN** : $(F + G)_{(x)} = F_{(x)} + G_{(x)} \wedge \text{Dom}(F + G) = \text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G)$
donde $F + G$ se denomina **FUNCIÓN SUMA**
- * **SUSTRACCIÓN** : $(F - G)_{(x)} = F_{(x)} - G_{(x)} \wedge \text{Dom}(F - G) = \text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G)$
donde $F - G$ recibe el nombre de **FUNCIÓN DIFERENCIA**
- * **MULTIPLICACIÓN** : $(F \cdot G)_{(x)} = F_{(x)} \cdot G_{(x)} \wedge \text{Dom}(F \cdot G) = \text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G)$
donde $F \cdot G$ se llama **FUNCIÓN PRODUCTO**
- * **DIVISIÓN** : $\left(\frac{F}{G}\right)_{(x)} = \frac{F_{(x)}}{G_{(x)}} \wedge \text{Dom}\left(\frac{F}{G}\right) = \text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G) - \{x / G_{(x)} = 0\}$
donde : $\frac{F}{G}$ se denomina **FUNCIÓN COCIENTE**

EJEMPLO 99

Dadas las funciones : $F = \{(0; 2), (1; 1), (2; 0), (3; 2), (4; 3), (5; 0)\}$
 $G = \{(1; 3), (2; 4), (3; 0), (4; 1), (5; 2), (6; 4)\}$

Calcular si es posible : $F + G$, $F - G$, FG , $\frac{F}{G}$, $\frac{G}{F}$

En primer lugar calculamos $\text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G)$ para ver si es posible realizar aquellas operaciones :

$$\text{Dom}(F) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \quad , \quad \text{Dom}(G) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$\rightarrow \text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G) = \{1; 2; 3; 4; 5\} \neq \emptyset \quad , \quad \text{luego:}$$

$$\underline{F + G} : \quad (F + G)_{(x)} = F_{(x)} + G_{(x)} \wedge \text{Dom}(F + G) = \text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G)$$

$$\text{para } x = 1 : (F + G)_{(1)} = F_{(1)} + G_{(1)} = 1 + 3 = 4 \rightarrow (1; 4) \in F + G$$

$$\text{Para } x = 2 : (F + G)_{(2)} = F_{(2)} + G_{(2)} = 0 + 4 = 4 \rightarrow (2; 4) \in F + G$$

$$\text{para } x = 3 : (F + G)_{(3)} = F_{(3)} + G_{(3)} = 2 + 0 = 2 \rightarrow (3; 2) \in F + G$$

$$\text{para } x = 4 : (F + G)_{(4)} = F_{(4)} + G_{(4)} = 3 + 1 = 4 \rightarrow (4; 4) \in F + G$$

$$\text{para } x = 5 : (F + G)_{(5)} = F_{(5)} + G_{(5)} = 0 + 2 = 2 \rightarrow (5; 2) \in F + G$$

$$\text{Luego: } F + G = \{(1; 4), (2; 4), (3; 2), (4; 4), (5; 2)\}$$

$$\underline{F - G} : \quad (F - G)_{(x)} = F_{(x)} - G_{(x)} \wedge \text{Dom}(F - G) = \text{Dom}(F) \cap \text{Dom}(G)$$

$$\text{Si } x = 1 : (F - G)_{(1)} = F_{(1)} - G_{(1)} = 1 - 3 = -2 \rightarrow (1; -2) \in F - G$$

$$\text{Si } x = 2 : (F - G)_{(2)} = F_{(2)} - G_{(2)} = 0 - 4 = -4 \rightarrow (2; -4) \in F - G$$

de tal manera que para $a \in \text{Dom}(G)$ evaluamos la función y obtenemos $G(a)$. Si este valor pertenece al $\text{Dom}(F)$, ($G(a) \in \text{Dom}(F)$), entonces es posible evaluar la función F en $x = G(a)$, con lo cual obtenemos $F(G(a)) \in \text{Ran}(F)$. Fig. 158

La operación realizada de esta manera se denomina COMPOSICIÓN de la función F con la función G , la que genera como resultado una nueva función llamada "F COMPOSICIÓN G" y denotada por $F \circ G$.

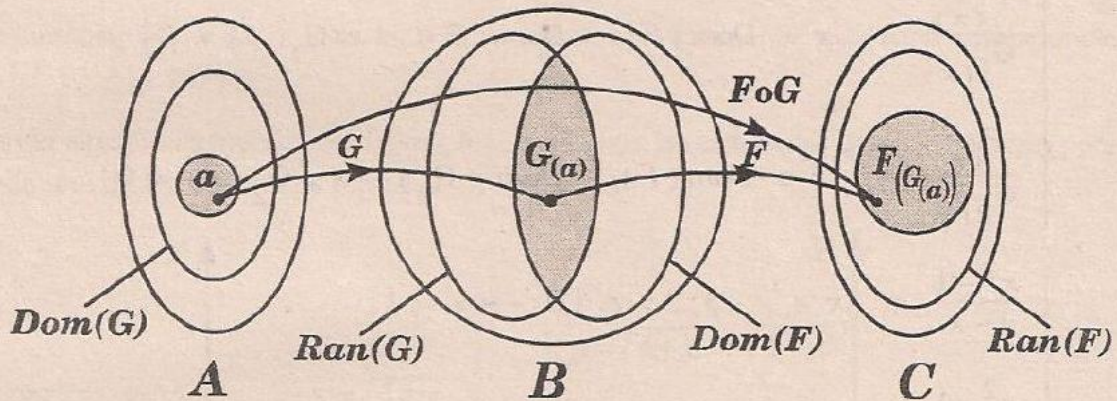


Fig. 158

En caso que $G(a) \notin \text{Dom}(F)$ sencillamente no será posible evaluar F en $x = G(a)$ y por consiguiente no se puede realizar la composición o no existe $F \circ G$ en a . Por lo tanto la composición de F con G ($F \circ G$) existe o se puede realizar si y solo si:

$$\text{Ran}(G) \cap \text{Dom}(F) \neq \emptyset \quad (6.2)$$

DEFINICIÓN

Dadas las funciones F y G , la composición de F con G define una nueva función denominada F COMPOSICIÓN G , que se denota por $F \circ G$, cuyo dominio es:

$$\text{Dom}(F \circ G) = \{x/x \in \text{Dom}(G) \wedge G(x) \in \text{Dom}(F)\} \quad (6.3)$$

y su regla de correspondencia esta dada por:

$$F \circ G(x) = F(G(x)) \quad (6.4)$$

EJEMPLO 102

Sean las funciones : $F = \{(1;2), (2;3), (3;1), (4;1), (5;0)\}$ y
 $G = \{(0;2), (1;3), (2;0), (3;4), (4;6)\}$

Calcular: $F \circ G$ y $G \circ F$ si es posible

De las funciones F y G se observa que :

$$\text{Dom}(G) = \{0; 1; 2; 3; 4\} \quad \text{y} \quad \text{Dom}(F) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Además: $G(0) = 2$; $G(1) = 3$; $G(2) = 0$; $G(3) = 4$; $G(4) = 6$

$$F(1) = 2$$
 ; $F(2) = 3$; $F(3) = 1$; $F(4) = 1$; $F(5) = 0$

$F \circ G$: Calculemos: $F \circ G_{(x)} = F(G_{(x)})$ en caso sea posible, para lo cual le asignamos valores a x del $\text{Dom}(G)$:

Para :

$$x = 0 : F \circ G_{(0)} = F(G_{(0)}) = F_{(2)} = 3 \rightarrow (0; 3) \in F \circ G$$

$$x = 1 : F \circ G_{(1)} = F(G_{(1)}) = F_{(3)} = 1 \rightarrow (1; 1) \in F \circ G$$

$$x = 2 : F \circ G_{(2)} = F(G_{(2)}) = F_{(0)} \text{ no existe, pues } G_{(2)} = 0 \notin \text{Dom}(F)$$

$$x = 3 : F \circ G_{(3)} = F(G_{(3)}) = F_{(4)} = 1 \rightarrow (3; 1) \in F \circ G$$

$$x = 4 : F \circ G_{(4)} = F(G_{(4)}) = F_{(6)} \text{ no existe pues } G_{(4)} = 6 \notin \text{Dom}(F)$$

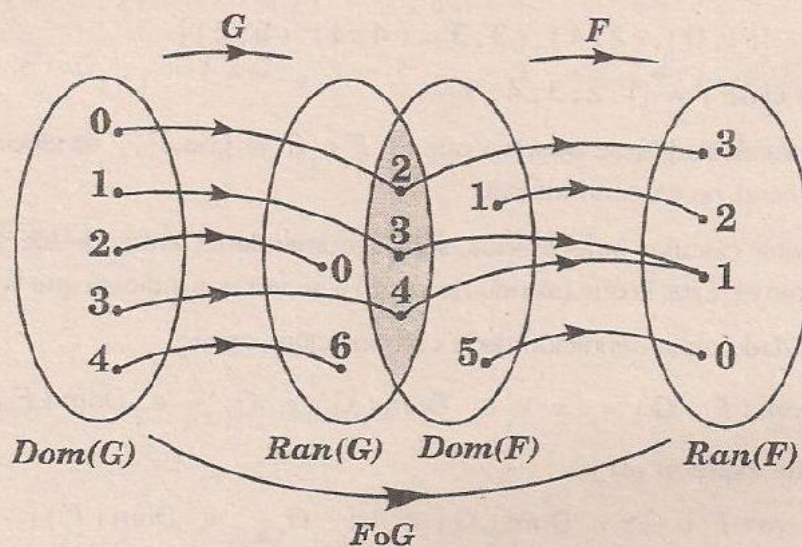


Fig. 159

Luego: $F \circ G = \{(0; 3), (1; 1), (3; 1)\}$ donde: $\text{Dom}(F \circ G) = \{0; 1; 3\}$

$G \circ F$: mediante la regla: $G \circ F_{(x)} = G(F_{(x)})$, calculamos esta composición asignándole a x valores del $\text{Dom}(F)$

$$\text{Para } x = 1 : G \circ F_{(1)} = G(F_{(1)}) = G_{(2)} = 0 \rightarrow (1; 0) \in G \circ F$$

$$x = 2 : G \circ F_{(2)} = G(F_{(2)}) = G_{(3)} = 4 \rightarrow (2; 4) \in G \circ F$$

$$x = 3 : G \circ F_{(3)} = G(F_{(3)}) = G_{(1)} = 3 \rightarrow (3; 3) \in G \circ F$$



CLASES DE FUNCIONES

FUNCIÓN PAR, FUNCIÓN IMPAR, FUNCIÓN PERIÓDICA

Antes de definir a las dos primeras, mencionaremos un concepto bastante elemental que será de mucha utilidad para tal propósito.

Sea S un conjunto de números reales, $S \subset \mathbb{R} \wedge S \neq \emptyset$; se dice que S es un conjunto simétrico si y solo si :

$$\forall x \in S : -x \in S \quad (7.1)$$

EJEMPLO 105

- * El conjunto $S = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ es SIMÉTRICO, pues para cualquier $x \in S$ se observa que $-x \in S$
- * El intervalo $R = \langle -5; 5 \rangle$ es un conjunto SIMÉTRICO, porque cada elemento $x \in R$ tiene su respectivo elemento $-x \in R$
- * El intervalo $T = [-3; 3\rangle$ no es un conjunto SIMÉTRICO, porque $-3 \in T$ pero $-(-3) = 3 \notin T$, es decir, existe un elemento que no cumple con (7.1)
- * El conjunto: $V = \langle -\infty; -6 \rangle \cup [6; +\infty)$ es un conjunto SIMÉTRICO
- * El conjunto: $W = \mathbb{R} - \{2\}$ no es un conjunto simétrico, porque $-2 \in W$ pero $-(-2) = 2 \notin W$
- * El conjunto de los números reales (\mathbb{R}) es un conjunto SIMÉTRICO.

PROPIEDAD

Sean S y T dos conjuntos no nulos de números reales ($S \subset \mathbb{R}; T \subset \mathbb{R}$)

Si S y T son conjuntos SIMÉTRICOS, entonces:

$$S \cup T ; S \cap T ; S - T ; S^c \quad (7.2)$$

son también conjuntos SIMÉTRICOS (los resultados de éstas operaciones con S y T deben ser no vacíos)

Dejamos al lector la demostración de esta propiedad

FUNCIÓN PAR

Una función F , definida por $y = F_{(x)} \wedge x \in \text{Dom}(F)$, se dice que es PAR si y solo si satisface las condiciones:

- * $\text{Dom}(F)$ es un conjunto SIMÉTRICO * $F_{(-x)} = F_{(x)} ; \forall x \in \text{Dom}(F)$

EJEMPLO 106

- * Para la función F definida por: $F_{(x)} = x^2$ y cuyo dominio implícito es $\text{Dom}(F) = \mathbb{R}$, se cumple que:

A. $\text{Dom}(F) = \mathbb{R}$ es un conjunto SIMÉTRICO

B. $F_{(-x)} = (-x)^2 = x^2 = F_{(x)} ; \forall x \in \text{Dom}(F)$

- * Luego, podemos afirmar que F es una función PAR

- * La función G definida por: $G_{(x)} = \sqrt{4 - |x|}$ tiene dominio implícito: $\text{Dom}(G) = [-4; 4]$ y para ésta se cumple que:

A. $\text{Dom}(G) = [-4; 4]$ es un conjunto SIMÉTRICO

B. $G_{(-x)} = \sqrt{4 - |-x|} = \sqrt{4 - |x|} = G_{(x)} ; \forall x \in [-4; 4]$

Por lo tanto, G es una función PAR

- * La función H dada por: $H_{(x)} = |x| - 2 \wedge x \in <-2; 5>$, así definida no es PAR, pues $\text{Dom}(H) = <-2; 5>$ NO es un conjunto SIMÉTRICO, a pesar que: $H_{(-x)} = H_{(x)}$

Observe que en primer lugar siempre debe satisfacerse la primera condición. De no ser así, es innecesario proseguir con la otra condición.

Las gráficas de cada una de éstas funciones se muestran en las Fig. 163.

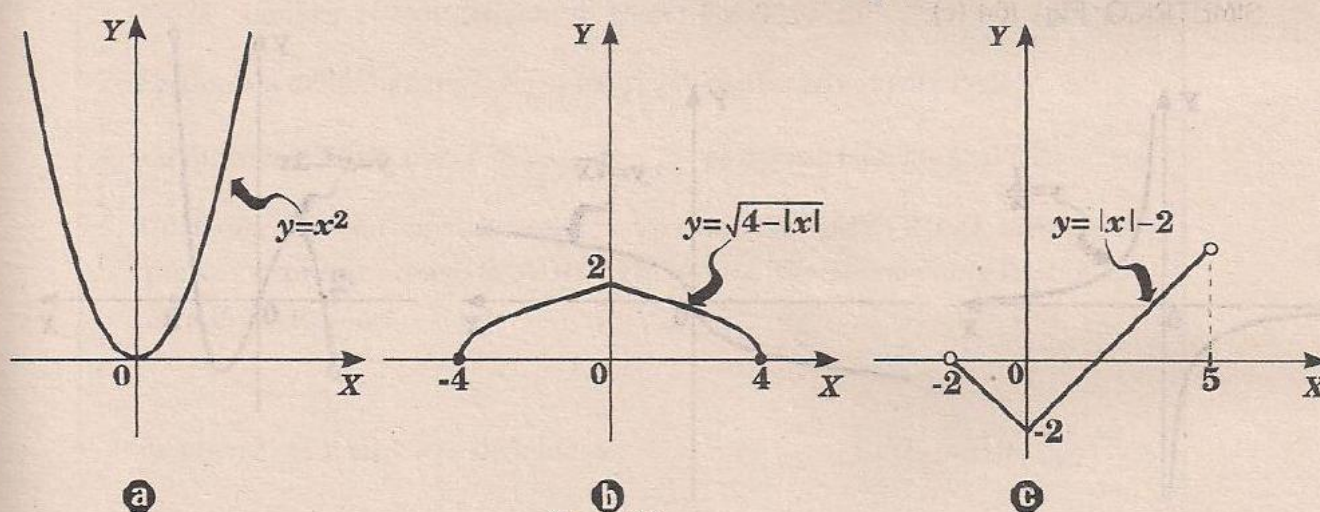


Fig. 163

NOTA: La gráfica de toda función PAR, resulta SIMÉTRICA con respecto al eje Y Fig. 163 (a) y (b)

FUNCIÓN PERIÓDICA

Una función F definida por : $y = F_{(x)} \wedge x \in \text{Dom}(F)$, se llama PERIÓDICA si y sólo si existe un número real p no nulo tal que $\forall x \in \text{Dom}(F)$, satisface las siguientes condiciones :

$$* \quad x \in \text{Dom}(F) \rightarrow x+p \in \text{Dom}(F)$$

$$* \quad F_{(x+p)} = F_{(x)}$$

donde : p se denomina PERÍODO de la función F

El mínimo número positivo p que cumple con aquellas condiciones se denomina PERÍODO MÍNIMO de F .

EJEMPLO 108

Para la función MANTISA definida por :

$$F_{(x)} = \text{man}(x) = x - \llbracket x \rrbracket$$

cuyo dominio implícito es $\text{Dom}(F) = \mathbb{R}$. Sea $p \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que :

$$\forall x \in \text{Dom}(F) = \mathbb{R} , \text{ se cumple que :}$$

$$a) \quad x \in \mathbb{R} \rightarrow x+p \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad F_{(x+p)} = F_{(x)}$$

Si este p existe entonces diremos que F es una función PERIÓDICA.

La condición (a) es verdadera para cualquier $p \in \mathbb{R} - \{0\}$, pues la suma de dos números reales es otro real (axioma de clausura o cerradura de la adición en \mathbb{R})

La condición (b) se puede colocar así :

$$\begin{aligned} F_{(x+p)} = F_{(x)} &\Leftrightarrow x+p - \llbracket x+p \rrbracket = x - \llbracket x \rrbracket \Leftrightarrow p + \llbracket x \rrbracket = \llbracket x+p \rrbracket \\ &\Leftrightarrow \llbracket x+p \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + p \Leftrightarrow p \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (por (3.13-3))} \end{aligned}$$

es decir , ésta es verdadera sólo si p es un número entero .

En consecuencia de (a) y (b), p existe y es un número no nulo; por lo que F es PERIÓDICA. Además p es el PERÍODO de la función F y el menor número positivo p (en este caso, entero) $p = 1$ se llama PERÍODO MÍNIMO de F (Fig. 80)

EJEMPLO 109

Dada la función G definida por :

$$G_{(x)} = \llbracket 3x \rrbracket - 3 \llbracket x \rrbracket$$

FUNCIÓN CRECIENTE

DEFINICIÓN

La función F se dice que es **CRECIENTE** en el intervalo S si y solo si para dos elementos cualesquiera $x_1 ; x_2 \in S$:

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) < F(x_2) \quad (7.5)$$

En la Fig. 167 tenga en cuenta que de la gráfica cartesiana de F se ha tomado solamente la parte que corresponde al intervalo S . Se puede apreciar que a medida que los valores de x van aumentando, los valores de F también van aumentando (crecen).

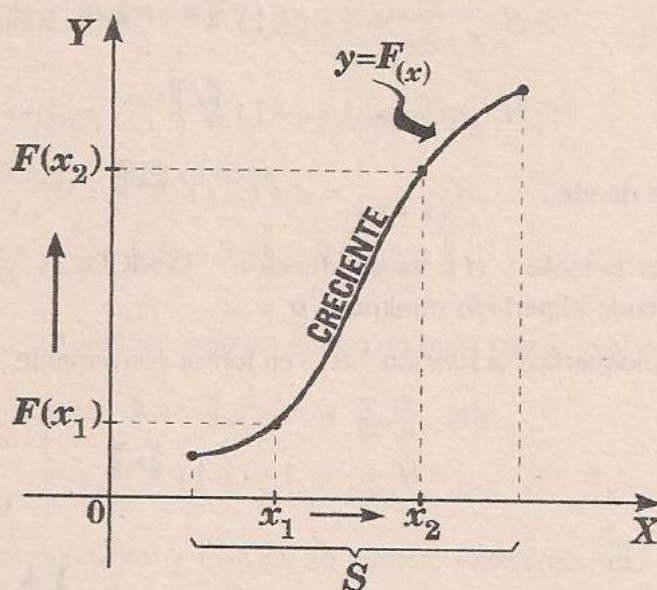


Fig. 167

FUNCIÓN DECRECIENTE

DEFINICIÓN

La función F se denomina **DECRECIENTE** en el intervalo S si y solo si para dos elementos cualesquiera $x_1 ; x_2 \in S$ se cumple que :

$$x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) > F(x_2) \quad (7.6)$$

Para la Fig. 168 en este caso se observa que mientras los valores de x van aumentando, los valores de la función F van disminuyendo (decrecen).

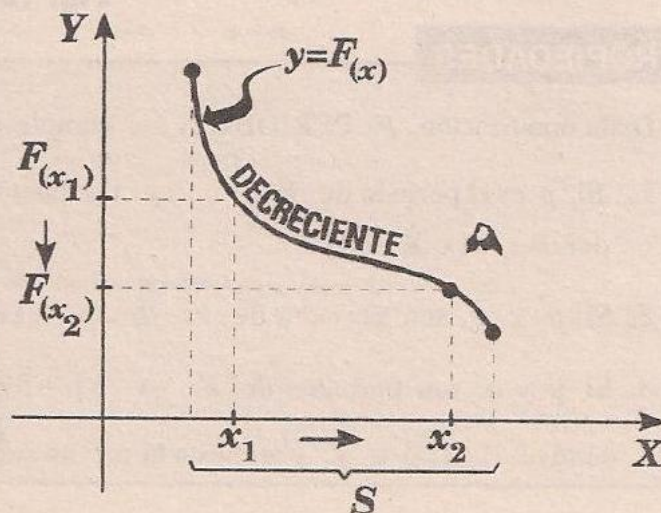


Fig. 168

EJEMPLO 111

Para la función $F(x) = x^2$, cuyo dominio implícito es $Dom(F) = \mathbb{R}$, podemos decir que :

- * La función G es NO DECRECIENTE en el intervalo $S_1 = <-3; 1]$ ($S_1 \subset \text{Dom}(G)$)
- * La función G es NO CRECIENTE en el intervalo $S_2 = [-1; 3>$ ($S_2 \subset \text{Dom}(G)$)

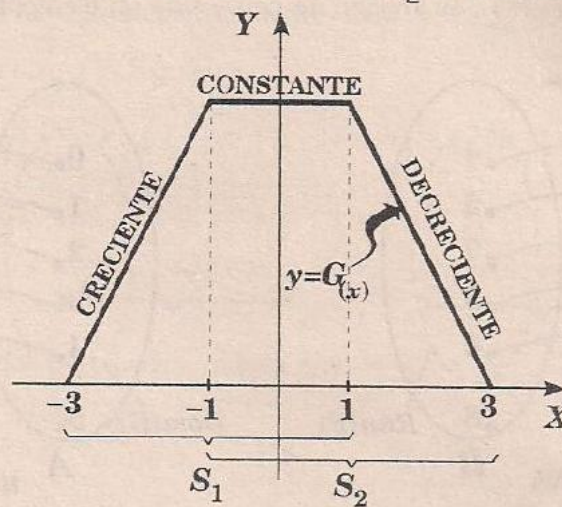


Fig. 172

FUNCIÓN INYECTIVA, FUNCIÓN SURYECTIVA FUNCIÓN BIYECTIVA - APLICACIÓN

FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE

Es posible que una función tome el mismo valor para diferentes valores de su dominio. Por ejemplo, la función **CONSTANTE** toma siempre el mismo valor, para todos los valores de su dominio; la función **VALOR ABSOLUTO** toma el mismo valor para dos valores distintos a y $-a$ de su dominio. La función F dada por $F_{(x)} = x^3 - x + 2$ toma el mismo valor en $x = -1$, en $x = 0$ y en $x = 1$:

$$F_{(-1)} = 2 \quad ; \quad F_{(0)} = 2 \quad ; \quad F_{(1)} = 2$$

Aquella función donde **NO** se repiten los valores que toma se denomina **INYECTIVA** o **UNIVALENTE** (uno a uno).

DEFINICIÓN

Una función F definida por $y = F_{(x)} \wedge x \in \text{Dom}(F)$, se llama **INYECTIVA** o **UNIVALENTE** si y solo si cada elemento $y \in \text{Ran}(F)$ es imagen de un único elemento $x \in \text{Dom}(F)$; dicho de otra forma, para dos elementos cualesquiera $x_1, x_2 \in \text{Dom}(F)$, si estos elementos son diferentes entonces sus imágenes (vía F) también son diferentes, así:

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow F_{(x_1)} \neq F_{(x_2)} \quad (7.9)$$

EJEMPLO 113

La función F cuya representación gráfica se muestra en la Fig.173 (a) es INYECTIVA, porque cada elemento del $Ran(F)$ es imagen de uno y solo un elemento del $Dom(F)$.

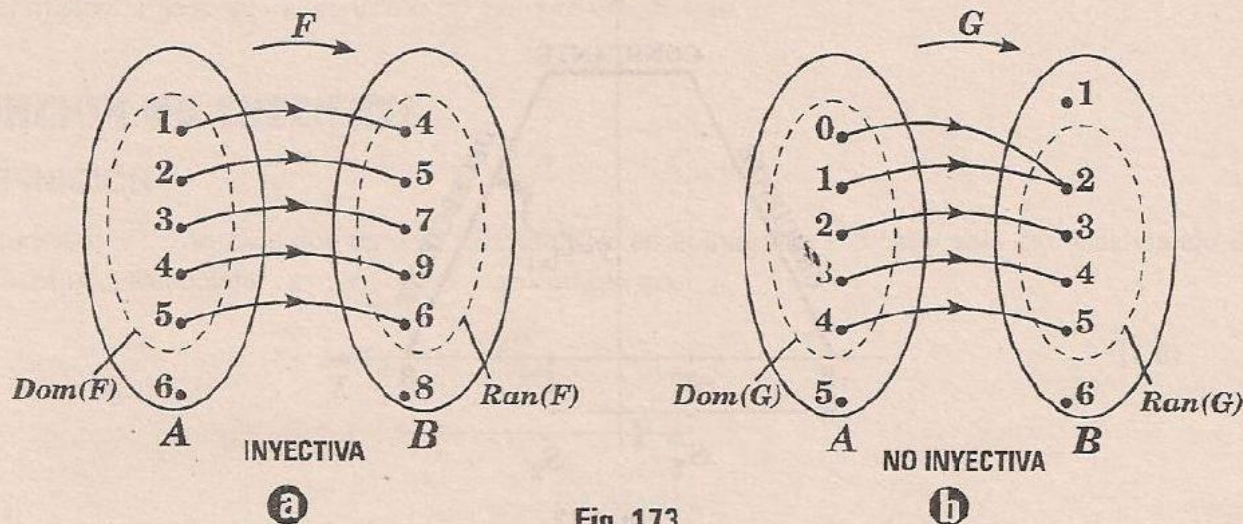


Fig. 173

En cambio la función G representada en la Fig. 173 (b) No es INYECTIVA, pues dos elementos distintos 0 y $1 \in Dom(G)$ tienen la misma imagen $2 \in Ran(G)$.

Una propiedad de mucha utilidad, que sirve para demostrar que una función es INYECTIVA, es la que se deduce de (7.9). De la lógica proposicional, recuerde que: $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$, por lo que (7.9) se puede expresar así:

$$F(x_1) = F(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \quad (7.10)$$

Es decir, partiendo de la hipótesis de que existen dos elementos $x_1, x_2 \in Dom(F)$ cuyas imágenes son iguales, se debe llegar a la conclusión de que dichos elementos x_1 y x_2 son iguales.

EJEMPLO 114

Sea la función F dada, por $F(x) = 2x + 5$ cuyo dominio es: $Dom(F) = \mathbb{R}$

Para dos elementos $x_1, x_2 \in Dom(F)$, supongamos que sus imágenes, vía F son iguales:

$$F(x_1) = F(x_2) \rightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

es decir, llegamos a la conclusión de que dichos elementos son iguales. Por lo tanto, la función F es INYECTIVA O UNIVALENTE.

EJEMPLO 115

Averiguar si la función G , definida por: $G(x) = \frac{x}{1+|x|}$ es INYECTIVA

EJEMPLO 121

Mostrar que la función $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por :

$$G(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 1 \\ x^3 & ; x < 1 \end{cases}, \text{ es biyectiva}$$

Luego de graficar la función G en el plano cartesiano (Fig. 179) se observa que ésta es INYECTIVA, pues cualquier recta horizontal interseca a dicha gráfica en un punto. Además es SURYECTIVA, porque $\text{Ran}(G) = \mathbb{R}$ (conjunto de llegada).

Por lo tanto G , es BIYECTIVA. La demostración analítica la dejamos para el lector.

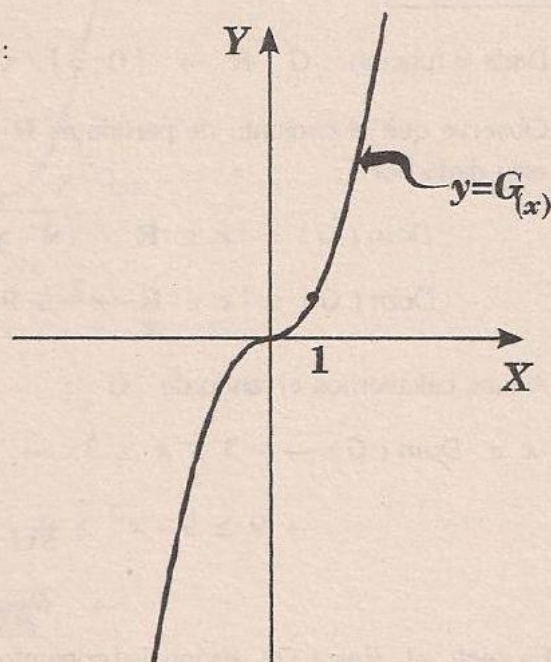


Fig. 179

APLICACIÓN

DEFINICIÓN

Una función $F : A \rightarrow B$ se llama APLICACIÓN si y solo si cada $x \in A$ necesariamente tiene una imagen $y \in B$, vía F , que le corresponde (o tal que $(x; y) \in F$); es decir :

$$\text{Dom}(F) = A$$

EJEMPLO 122

La función que se representa en la Fig. 180, es una APLICACIÓN, en vista que todos los elementos $x \in A$ tienen su correspondiente imagen

$y \in B$, osea $\text{Dom}(F) = A$

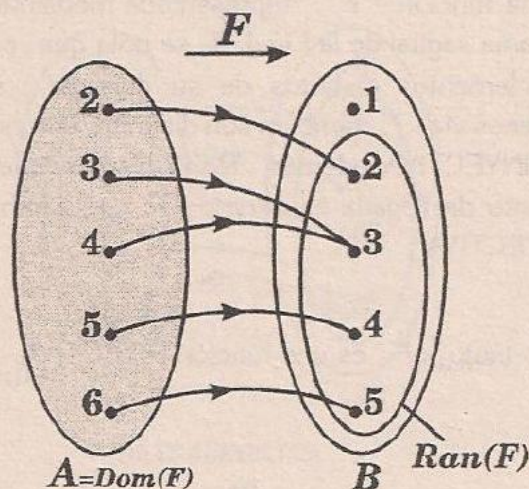


Fig. 180

EJEMPLO 123

Una función se define de la siguiente manera : $F : <-2; 2> \rightarrow <0; 2> / F_{(x)} = \sqrt{2-|x|}$

Observe que el conjunto de partida es : $A = <-2; 2>$. Averigüemos si la función puede evaluarse para estos valores; tenga en cuenta que $2-|x| \geq 0$.

$$\begin{aligned} x \in A = <-2; 2> &\rightarrow -2 < x < 2 \rightarrow 0 \leq |x| < 2 \rightarrow 0 \geq -|x| > -2 \\ &\rightarrow 2 \geq 2 - |x| > 0 \end{aligned}$$

En efecto, la función F puede evaluarse $\forall x \in A = <-2; 2>$, es decir $\text{Dom}(F) = A$. Por lo tanto F es una APLICACIÓN.

De las funciones elementales que se vieron anteriormente, y que son de la forma $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, son APLICACIONES todas, excepto la función RAIZ CUADRADA.

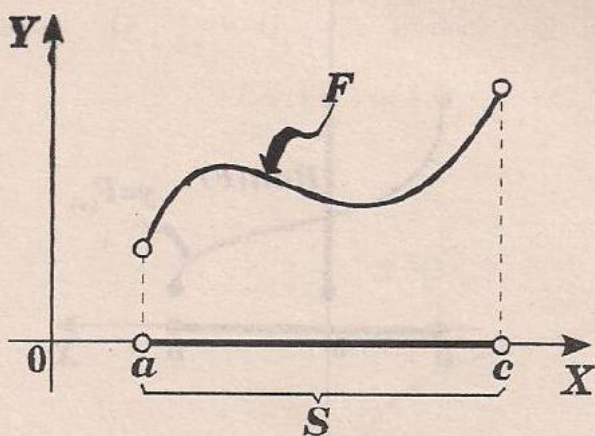
FUNCIÓN CONTINUA

En el lenguaje ordinario, se dice que un proceso es CONTINUO si éste no sufre interrupciones ni saltos bruscos en cada una de las fases que lo conforman. En matemática, la idea de CONTINUIDAD es similar.

La continuidad de una función en un punto se fundamenta con la definición del límite de dicha función en aquel punto; definiciones que no están dentro del propósito de este libro.

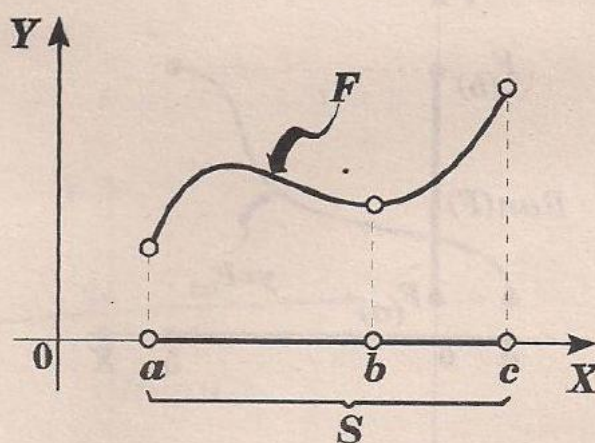
Lo que se pretende es sencillamente dar una idea de la continuidad de una función sobre un cierto intervalo, a partir de su representación gráfica en el plano cartesiano.

Considerando la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y además un intervalo S ($S \subset \text{Dom}(F)$); se dice que F es CONTINUA sobre S si su gráfica cartesiana consiste en un sólo trazo, sin interrupciones ni saltos bruscos o huecos, sobre dicho intervalo (Fig. 181)

EJEMPLO 124

F es CONTINUA sobre S

I



F no es CONTINUA sobre S
pero F es CONTINUA sobre $<a;b>$
y F es CONTINUA sobre $<b;c>$

II



FUNCIÓN INVERSA

En el capítulo 1, hemos definido a la CORRESPONDENCIA INVERSA y en el capítulo 2 a la RELACIÓN INVERSA. En el caso de una correspondencia $C : A \rightarrow B$, al intercambiar las componentes de sus pares ordenados se obtiene como resultado otro conjunto de pares ordenados denominado CORRESPONDENCIA INVERSA $C^* : B \rightarrow A$. Para el caso de una función $F : A \rightarrow B$ (un tipo especial de correspondencia), ¿bajo qué condiciones, al intercambiar las componentes de sus pares, el conjunto de pares obtenido seguirá siendo una función?

Consideremos la función :

$$F = \{ (x; y) \mid y = F_{(x)} \wedge x \in \text{Dom}(F) \}$$

Recuerde que una función es un conjunto de pares ordenados, donde dos pares distintos no tienen la misma primera componente.

Luego de intercambiar las componentes de sus pares, obtenemos :

$$F^* = \{ (y; x) \mid y = F_{(x)} \wedge x \in \text{Dom}(F) \}$$

Nótese que las componentes $x \in y$ siguen ligadas por la misma regla de correspondencia.

Supongamos que en F existen dos pares distintos con la misma segunda componente, entonces en F^* habrán dos pares distintos con la misma primera componente y con ello F^* no será una función.

EJEMPLO 128

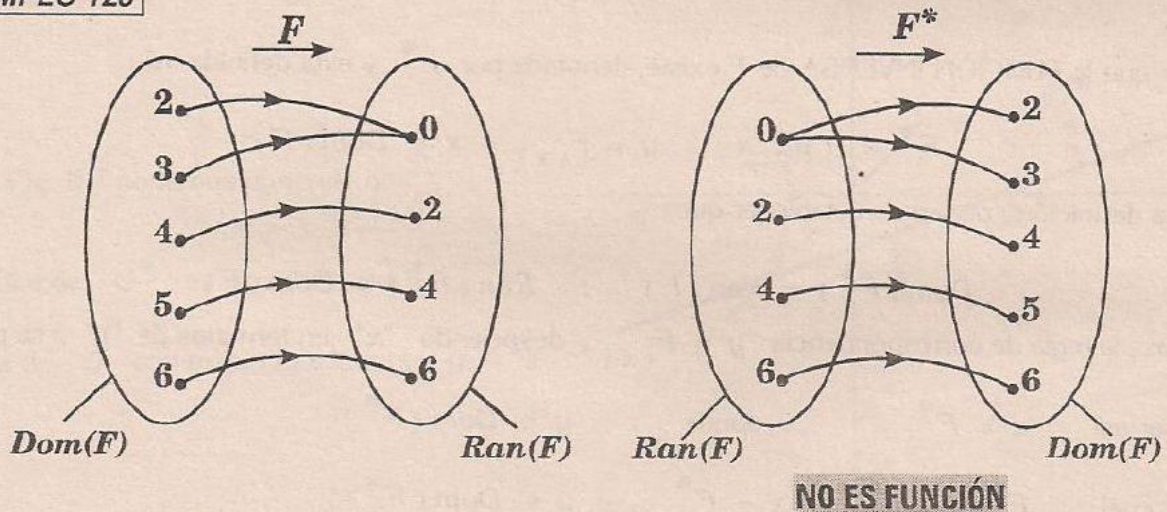


Fig. 185

Pero si en F , dos pares distintos tuviesen sus segundas componentes distintas, es decir, si F fuese una función INYECTIVA o UNIVALENTE, entonces en F^* existirán dos pares distintos cuyas primeras componentes son diferentes, y en ese caso F^* será una función.

EJEMPLO 129

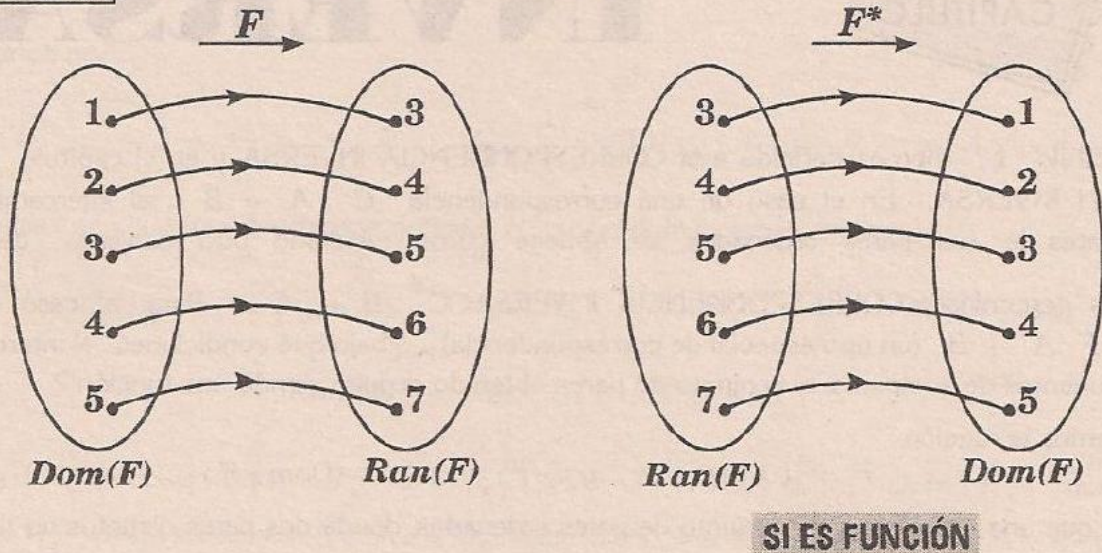


Fig. 186

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que F^* sea una función (o también se dice que F^* existe o que F posee INVERSA) es que F sea una función INYECTIVA O UNIVALENTE.

DEFINICIÓN

Siendo F una función INYECTIVA o UNIVALENTE, dada por:

$$F = \{(x; y) / y = F_{(x)} \wedge x \in Dom(F)\}$$

se dice que la FUNCIÓN INVERSA de F existe, denotada por F^* y está definida así:

$$F^* = \{(y; x) / y = F_{(x)} \wedge x \in Dom(F)\}$$

De esta definición, podemos establecer que:

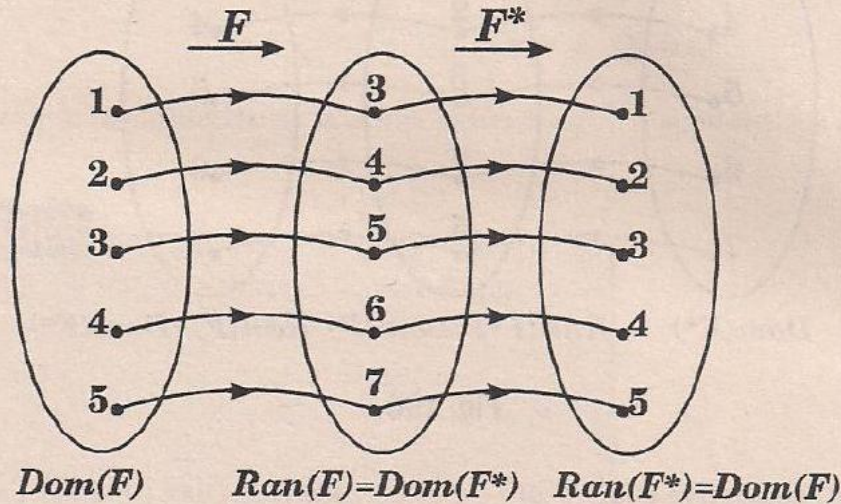
$$Dom(F^*) = Ran(F) \quad ; \quad Ran(F^*) = Dom(F)$$

Además, la regla de correspondencia $y = F_{(x)}$, despejando "x" en términos de "y", se puede expresar así: $x = F^*_{(y)}$; donde : $y \in Dom(F^*)$

$$\text{Con lo cual : } F^* = \{(y; x) / x = F^*_{(y)} \wedge y \in Dom(F^*)\}$$

EJEMPLO 132

Considerando la función del ejemplo 129, observe que F y F^* se pueden representar así :

**Fig. 189**

Recordando la composición de funciones, de la Fig. 189, observe que : $F^* \circ F$ existe, además:

$$Dom(F^* \circ F) = Dom(F) \quad y$$

$$F^* \circ F_{(1)} = F^*(F_{(1)}) = F^*_{(3)} = 1$$

$$F^* \circ F_{(2)} = F^*(F_{(2)}) = F^*_{(4)} = 2$$

$$F^* \circ F_{(3)} = F^*(F_{(3)}) = F^*_{(5)} = 3$$

$$F^* \circ F_{(4)} = F^*(F_{(4)}) = F^*_{(6)} = 4$$

$$F^* \circ F_{(5)} = F^*(F_{(5)}) = F^*_{(7)} = 5$$

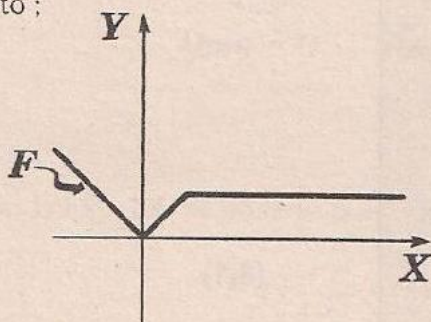
Es decir : $F^* \circ F_{(x)} = x \quad ; \quad \forall x \in Dom(F)$

Asimismo, también podemos realizar la composición $F \circ F^*$, así :

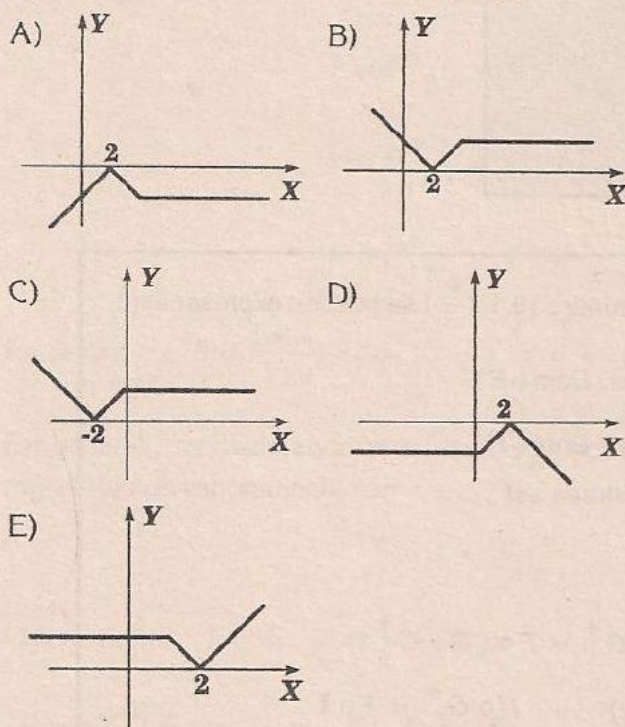
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1

Sea la función "F" descrita por el gráfico adjunto;



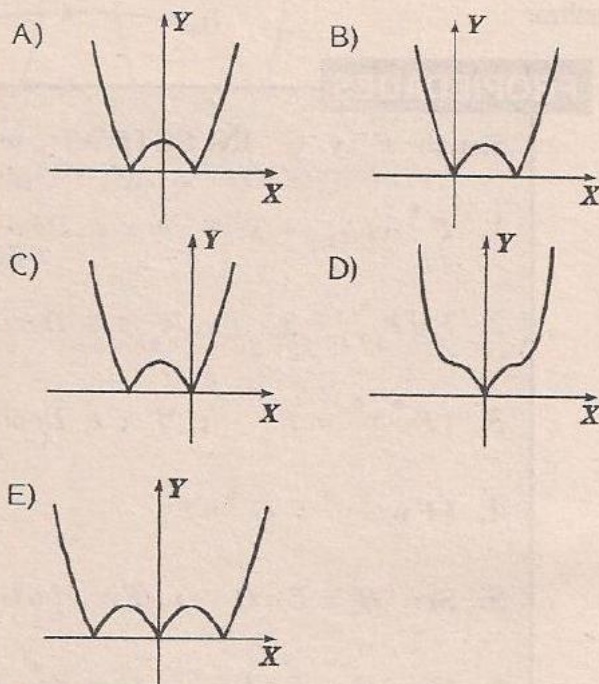
Indicar el gráfico que describe $F_{(2-x)}$



PROBLEMA 2

Hallar la gráfica de la función:

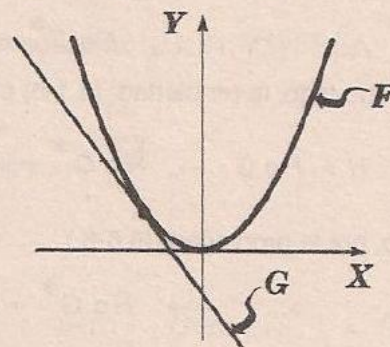
$$F_{(x)} = |x^2 - 2|x||, \quad x \in \mathbb{R}$$



PROBLEMA 3

En la figura se muestran las gráficas cartesianas de las funciones:

$$F_{(x)} = \frac{x^2}{8}; \quad G_{(x)} = -x - m$$



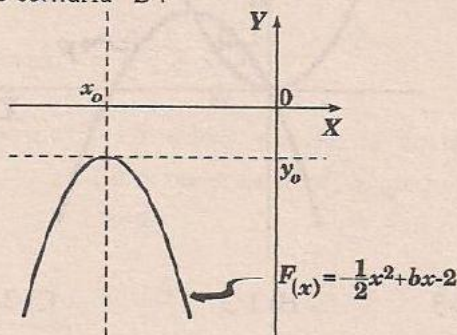
Entonces, m es igual a:

- A) -2 B) -4 C) -1
D) 2 E) 4

PROBLEMA 4

En base al gráfico adjunto. Halle el menor valor entero que tomaría "b".

- A) -3
B) -2
C) -1
D) 0
E) 1



PROBLEMA 5

Determinar el valor de k para el cual el punto máximo de la gráfica de $F_{(x)} = 2k + 3x - 5x^2$, tiene el mismo valor para las coordenadas X e Y .

- A) $\frac{3}{20}$ B) $-\frac{3}{10}$ C) $-\frac{9}{20}$
D) $-\frac{3}{40}$ E) $-\frac{9}{40}$

PROBLEMA 6

Sean las funciones : $F_{(x)} = 2x^2 + 4x - 30$

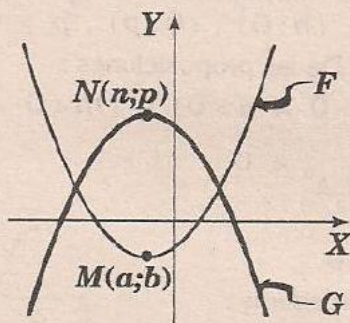
$$G_{(x)} = -3x^2 - 6x + 24$$

Donde : $b = \min(F)$

$$p = \max(G)$$

Hallar la distancia de M a N

- A) 21
B) 34
C) 59
D) 61
E) 93



PROBLEMA 7

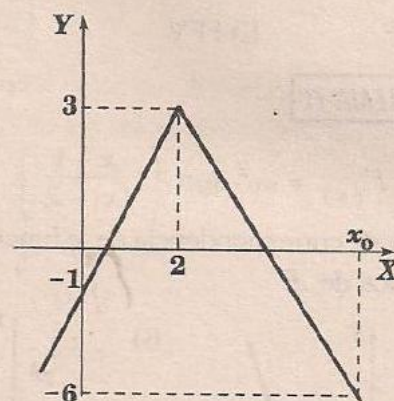
El gráfico que se adjunta representa a una función

real en variable real cuya regla de correspondencia es :

$$F_{(x)} = a|x - b| + c$$

Determine : $\frac{x_0}{abc}$

- A) 2
B) 1
C) $1/2$
D) $-1/2$
E) -6



PROBLEMA 8

Considérese el triángulo formado por el eje de las ordenadas y la curva $|y| = 1 - x$. En dicho triángulo se inscribe un rectángulo, de lados paralelos a los ejes de coordenadas, de manera que su área sea la mayor posible. Dicha área será :

- A) Falta información B) $1/3$
C) $1/2$ D) 1 E) $3/2$

PROBLEMA 9

Hallar el área de la región limitada por las gráficas de :

$$y = 2 - |x| \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

- A) $\pi + 2$ B) $2(\pi + 2)$ C) $3(\pi - 2)$
D) $2 + 2\pi$ E) $3(\pi + 2)$

PROBLEMA 10

Sea la función cuadrática F tal que :

$$F_{(x)} = n!x^2 + (n+1)!x + (n-1)!$$

donde $n!$: factorial de $n \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}$

Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

PROBLEMA 34

Si: $F_{(x+2)} = x$ y $G_{(x-5)} = x^2$

Hallar:

$$H_{(x)} = \sqrt{\frac{F \circ G_{(x)} + G \circ F_{(x)}}{2}}$$

- A) $x+1$ B) $|x+4|$ C) $-(x+4)$
D) $|x-2|$ E) $x+2$

PROBLEMA 35

Dadas las funciones:

$$F_{(x)} = \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} & ; x \in <0; 4] \\ x + \sqrt{x} & ; x \in <4; \infty > \end{cases}$$

$$G_{(x)} = \begin{cases} x^2 & ; x \in <-2; 2> \\ x^3 & ; x \in <2; +\infty > \end{cases}$$

Determine: $\text{Dom}(F \circ G)$

- A) $<-2; +\infty> - \{2\}$ B) $<-2; +\infty> - \{0; 2\}$
C) $<2; +\infty>$ D) $<-2; 2> - \{0\}$
E) $<-2; +\infty> - \{0; 2; 4\}$

PROBLEMA 36

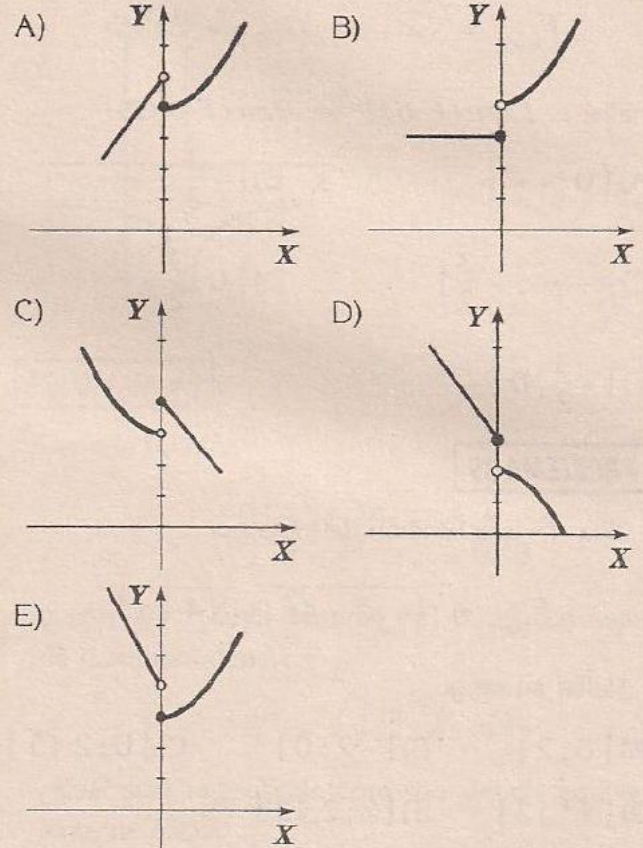
Si $F \wedge G$ son dos funciones definidas por:

$$F_{(x)} = \lceil x+3 \rceil + |2x| ; \text{Dom}(F) = <-1; 1>$$

$$G_{(x)} = \begin{cases} \left\lceil \frac{x+6}{2} \right\rceil & ; x \in <-2; 0> \\ |x|^2 + \lceil x \rceil & ; x \in [0; 1> \end{cases}$$

Determine el gráfico de:

$$(F+G)_{(x)}$$

**PROBLEMA 37**

Dadas las funciones:

$$F_{(x)} = |x-3| + |x+1|$$

$$G_{(x)} = \begin{cases} -2x & ; x > 3 \\ x^2 - 1 & ; -1 \leq x \leq 3 \\ 2x & ; x < -1 \end{cases}$$

Entonces el rango de: $F_{(x)} + G_{(x)}$; será:

- A) $[-2; 2] \cup [3; 12]$
B) $[-2; 2] \cup [4; 15]$
C) $[-2; 2] \cup [4; 12]$
D) $[-2; 2] \cup [4; 12>$
E) $[-2; 2] \cup <5; 12]$

PROBLEMA 38

Sean F y G dos funciones definidas por:

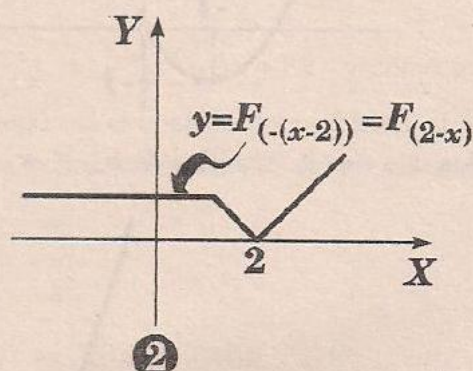
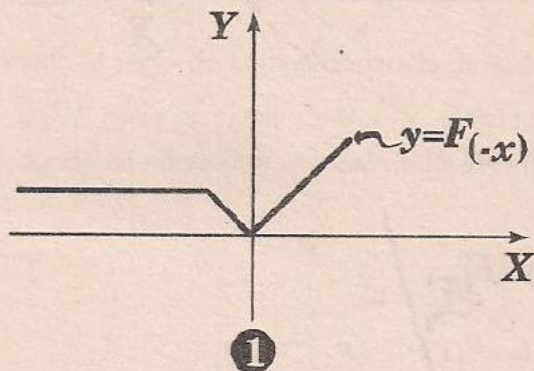
SOLUCIONARIO

RESOLUCIÓN 1

Sea : $G_{(x)} = F_{(2-x)} \rightarrow G_{(x)} = F_{(-(x-2))}$

Conociendo la gráfica de F , entonces la gráfica de $y = F_{(-x)}$ es la simetrización de aquella con respecto al eje Y (Fig. 1).

Si a ésta la desplazamos horizontalmente 2 unidades, obtenemos la gráfica de $F_{(-(x-2))}$, que es la que pide el problema (Fig. 2).



Rpta.: E

RESOLUCIÓN 2

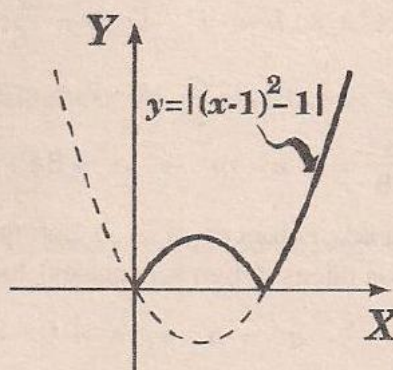
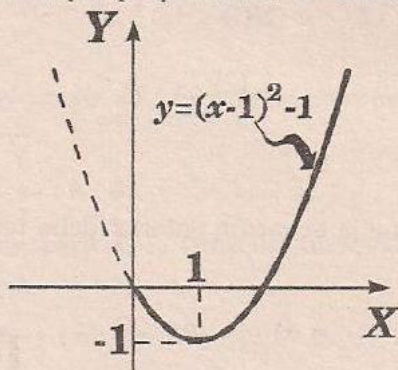
Consideremos dos casos :

1º) Si $x \geq 0$: $F_{(x)} = |x^2 - 2(x)| = |x^2 - 2x|$

Acomodando ésta regla de correspondencia adecuadamente :

$$F_{(x)} = |x^2 - 2x + 1 - 1| \rightarrow F_{(x)} = |(x-1)^2 - 1|$$

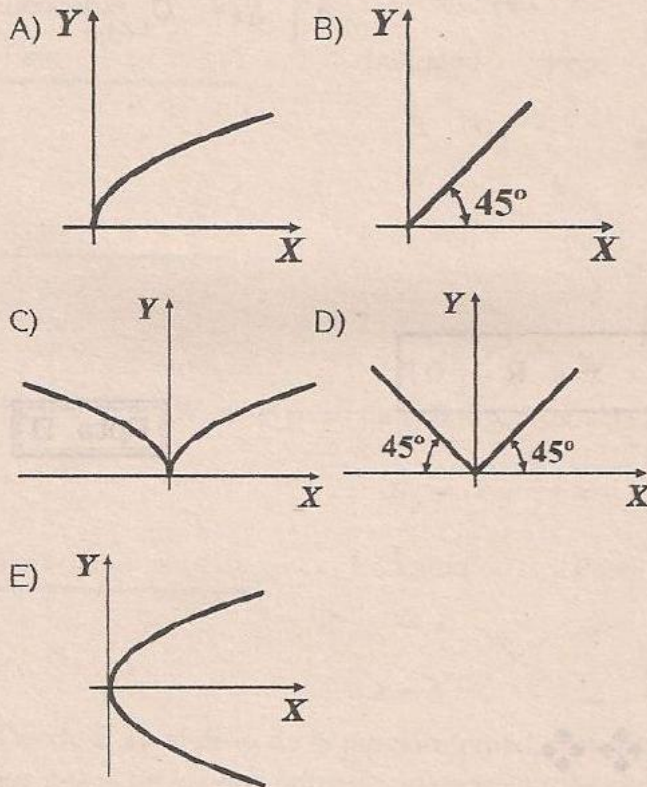
y su gráfica, por propiedades, se obtiene así :



PROBLEMAS PROPUESTOS

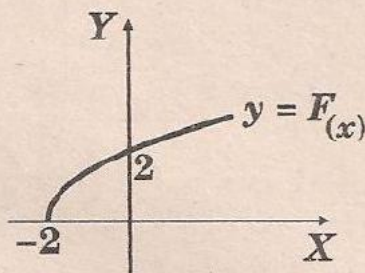
PROBLEMA 1

Indicar la gráfica de la función : $F_{(x)} = \sqrt{|x|}$



PROBLEMA 2

Indicar la regla de correspondencia de la función cuya gráfica es :



- A) $F_{(x)} = \sqrt{4x+2}$ B) $F_{(x)} = \sqrt{x+2}$
 C) $F_{(x)} = x^2 + 4$ D) $F_{(x)} = \sqrt{2-x}$
 E) $F_{(x)} = \sqrt{2x+4}$

PROBLEMA 3

Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada enunciado :

- I) Si el dominio de una función consta al menos de 2 elementos, el rango también consta al menos de 2 elementos.
 II) Si F y G tienen el mismo dominio entonces $\frac{F}{G}$ también tiene ese dominio.
 III) Si la gráfica de $y = F_{(x)}$ intercepta al eje X en $x = a$, entonces la gráfica de $y = F_{(x+h)}$ intercepta al eje X en $x = a - h$
 IV) El dominio maximal de $y = \sqrt{\frac{x}{4-x}}$ es $[0; 4 >$
 A) VVFF B) FFVV C) FVVF
 D) VVVV E) FFFF

PROBLEMA 4

Determinar el punto donde la función :

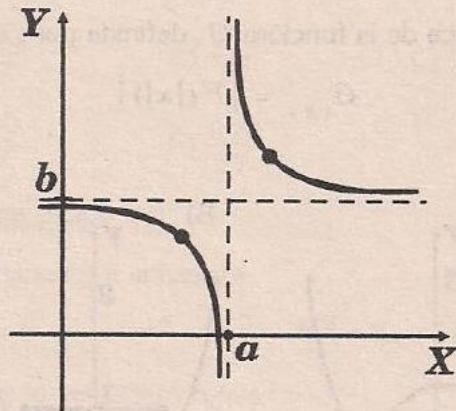
$$F_{(x)} = \begin{cases} -x-1 ; x \leq -1 \\ -\sqrt{1-x^2}-1 ; -1 < x < 1 \\ x-1 ; x \geq 1 \end{cases}$$

alcanza su mínimo valor.

- A) (0 ; 2) B) (0 ; 3) C) (0 ; - 3)
 D) (0 ; 1) E) (0 ; - 2)

PROBLEMA 5

Si la función : $F_{(x)} = \frac{1-2x}{2-x}$ se representa gráficamente así :



Entonces ab es igual a :

- A) 2 B) 4 C) 8
D) 22 E) 14

PROBLEMA 6

Sea la función F :

$$F_{(x)} = ||x+1|-2| ; x \in [-3, 1>$$

Hallar el área de la figura encerrada por la gráfica de F y el eje X

- A) $8 u^2$ B) $3/2 u^2$ C) $4 u^2$
D) $5/2 u^2$ E) $9/2 u^2$

PROBLEMA 7

Sea la función $F: <-1; 1> \rightarrow \mathbb{R}$ tal que :

$$F_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 4$$

Hallar su rango.

- A) $<-1; 1>$ B) $<-3; -1>$
C) $<0; 4>$ D) $<-3; 4>$
E) $<-3; 0>$

PROBLEMA 8

Si : $F_{(x)} = (x-0,9)(x-2,9)(x-4,9) + (x-1,9)(x-3,9)$

¿Cuántas, de las siguientes proposiciones, son verdaderas?

- I) Todas sus raíces son positivas
II) $F_{(x)}$ posee inversa en $<5; +\infty>$

III) La gráfica de F es cóncava hacia arriba en $<3; 4>$

IV) $F_{(x_0)}$ es un máximo relativo de F , siendo $1 < x_0 < 2$

V) Siendo x_1, x_2 y x_3 raíces reales de F :

$$x_1 < x_2 < x_3 \rightarrow 2 < x_2 < 3 \wedge 5 < x_3 < 6.$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 9

Dada la función :

$$F_{(x)} = x^4 + 2x^3 + x^2 - 8$$

Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada proposición :

- I. Tiene un mínimo en $x = -1$
II. Tiene 2 raíces reales
III. Su menor raíz está ubicada en $<-3; -2>$

- A) FVF B) FFV
C) VFF D) VFV
E) VVV

PROBLEMA 10

Determine a, b y c para que la función :

$$F_{(x)} = ax^4 + bx^2 + c$$

Tenga un valor extremo en $x = \frac{1}{2}$ y que la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$, sea : $2x - y + 4 = 0$

Dar el valor de $\frac{b+c}{a}$.

- A) 4 B) -4
C) $5/2$ D) $5/4$
E) $-5/4$

PROBLEMA 29

Con respecto a la proposiciones :

I. La gráfica cartesiana de : $F_{(x)} = \frac{x^2}{2} + 3x + 2$ interseca al eje X en dos puntos.

II. La función :

$G_{(x)} = -\frac{1}{3}(x^2 + 3x + a)$ no tiene raíces en \mathbb{R} , si $4a > 9$.

III. La gráfica cartesiana de :

$H_{(x)} = x^2 + (a+1)x + a$ interseca siempre al eje X en dos puntos, $\forall a \in \mathbb{R} - \{1\}$.

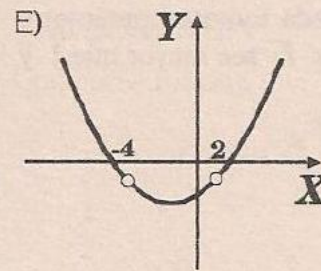
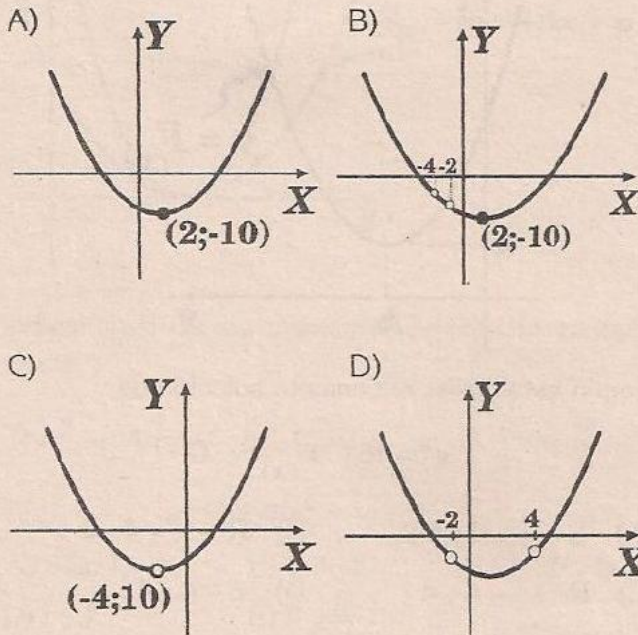
Son verdaderas :

- A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) Todas

PROBLEMA 30

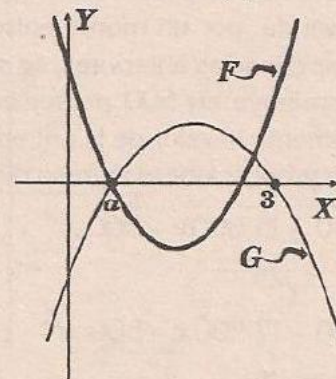
Indicar la gráfica de la función dada por :

$$F_{(x)} = \frac{x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 68x - 48}{x^2 + 6x + 8}$$

**PROBLEMA 31**

La figura muestra las gráficas cartesianas de las funciones F y G definidas por :

$$F_{(x)} = 2x^2 - 3x + 1 ; G_{(x)} = -2x^2 + 7x - b$$

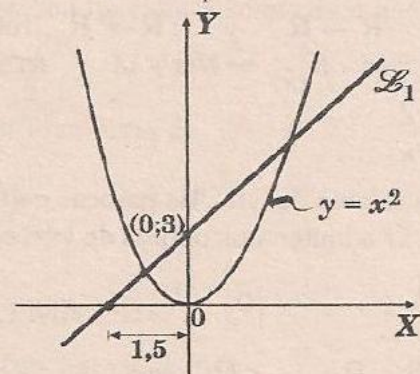


Hallar $(a + b)$:

- A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{9}{4}$
D) 5 E) 6

PROBLEMA 32

Del esquema adjunto, calcular las primeras componentes de los puntos comunes entre las gráficas de $y = x^2$ y \mathcal{L}_1 .



- A) 3 ; -1 B) 3 ; 1 C) -3 ; -1
D) 2 ; 3 E) -2 ; -3

PROBLEMA 56

¿Cuál de las siguientes funciones es creciente en el intervalo: $[-7\pi, -\pi]$?

- A) $y = \sqrt{-x}$ B) $y = \frac{1}{x^2+1}$
 C) $y = x^2$ D) $y = 2 - 3x$
 E) $y = \frac{1}{x}$

PROBLEMA 57

Sea la función:

$$F_{(x)} = \begin{cases} 0; & x \in <0;1> \\ 1; & x \in [1;2> \cup <4;5> \\ 2; & x = 2 \\ 3; & x \in <2;3> \end{cases}$$

Entonces F es:

- A) No creciente en $<0;2]$
 B) No creciente en $<2;5>$
 C) No decreciente en $<2;5>$
 D) Constante en $<1;3>$
 E) No decreciente en $<\frac{3}{2}; \frac{5}{2}>$

PROBLEMA 58

Sea una función F tal que:

$$F_{(x+1)} = -F_{(x)} \quad , \quad F_{(x)} = F_{(-x)}$$

para todo x real. Además $F_{(998,6)} = -3$.

Entonces los valores de $F_{(800,5)}$ y $F_{(800,6)}$ son, respectivamente:

- A) 0; 3 B) 3; 3
 C) 1; -3 D) 0; 0
 E) Uno de ellos no es calculable con la información dada.

PROBLEMA 59

De las siguientes afirmaciones:

- I. El producto de 2 funciones pares es una función par.
- II. El producto de 2 funciones impares es otra impar.
- III. Si una función es par entonces necesariamente tiene la siguiente regla de correspondencia $F_{(x)} = x^{2n}$ donde n es un número natural cualquiera.
- IV. Si una función es impar entonces necesariamente tiene la siguiente regla de correspondencia $F_{(x)} = x^{2n+1}$ donde n es un número natural cualquiera.
- V. $F_{(x)} = 0$ es una función par e impar al mismo tiempo.

¿Cuántas son correctas?

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) Todas

PROBLEMA 60

De las siguientes proposiciones:

- I. Si: $F_{(x)} = \sqrt{x-5} \wedge G_{(x)} = \sqrt{x+5}$, entonces: $F_{(x)} \cdot G_{(x)} = \sqrt{x^2-25}$ $\forall x \in <-5;5>$
- II. Si: $U_{(t)} = t^2 - t$; $t \in [0;4] \wedge V_{(t)} = t^2 - t$; $t \in [0;5]$, entonces las funciones U y V no son iguales.
- III. Dadas las funciones:

$$P(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-4} \quad y$$

$$Q(x) = \sqrt{(x-1)(x-4)}$$
 entonces no podemos negar que las funciones P y Q no son iguales.
- IV. Dos funciones son iguales si tienen la misma regla de correspondencia.