

# CHUYÊN TOÁN HỌC



**TẬP HAI**

PHAN THANH QUANG

# GIẢI THOẠI TOÁN HỌC

TẬP HAI

*(In lần thứ hai)*



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - 1995

*Chịu trách nhiệm xuất bản*

*Giám đốc :* TRẦN TRÂM PHƯƠNG

*Tổng biên tập :* NGUYỄN KHẮC PHI

*Trưởng chi nhánh NXBGD TẠI TP. HCM*

NGUYỄN KHƯƠNG ĐẮC

*Biên soạn :* PHAN THANH QUANG

*Biên tập :* NGUYỄN VĨNH CẠN

*Bìa :* NGÔ TRỌNG HIẾN

*Sửa bản in :* PHẠM XUÂN DIỆU

Giai thoại toán học T2/Phan Thanh Quang. - In lần thứ hai. - H. :  
Giáo dục, 1995.- 132 tr. 20,5cm

51(083)

MS : 81105015

## LỜI NÓI ĐẦU

Sau khi cuốn **Giai thoại toán học - tập I** ra đời, tác giả đã nhận được nhiều thư bạn đọc khuyến khích viết nốt tập hai. Do đó tuy có nhiều khó khăn, tác giả cũng cố gắng hoàn thành cuốn **Giai thoại toán học - tập II** để khỏi phụ lòng ưu ái của bạn đọc thân mến.

Cũng như GTTH - tập I, tập II gồm những câu chuyện "từ cổ chí kim - từ Đông sang Tây", nghiêm túc có, buồn cười có, để tạo nên một bức tranh sinh động đầy màu sắc của toán học trong đời thường.

Trong GTTH - tập II tác giả có đưa vào một số bài có tính chuyên môn, hơi nặng về lí luận (Số hoàn chỉnh : một màn bí mật; Cái vòng luân quần...), được trình bày dưới hình thức phổ thông, dễ hiểu. Nhưng nhìn chung toàn cuốn vẫn giữ được gam màu chủ đạo : phong phú về những sự kiện toán học trong đời thường; tươi vui, nhẹ nhàng về cách viết.

Trong cuốn này những danh từ riêng đã quen thuộc với bạn đọc như Pitago, Oclit, .... thì tác giả có phiên âm ra tiếng Việt. Những danh từ riêng khác ít được nhắc đến trong toán học phổ thông như Hermes, Bachet, H.Briggs... v.v... thì tác giả giữ nguyên cách viết latin của nó, để khi cần, bạn đọc có thể so sánh, tra cứu, tham khảo thêm được dễ dàng.

Tác giả rất vui mừng nếu các cuốn GTTH làm vừa lòng bạn đọc phần nào.

Tác giả tha thiết mong bạn đọc chỉ cho những thiếu sót của sách để lần xuất bản sau sách được tốt hơn.

Thư từ xin gửi về Chi nhánh Nhà xuất bản Giáo dục tại TP Hồ Chí Minh, 231 Nguyễn Văn Cừ Quận 5, TP Hồ Chí Minh.

Xin chân thành cảm ơn các Bạn

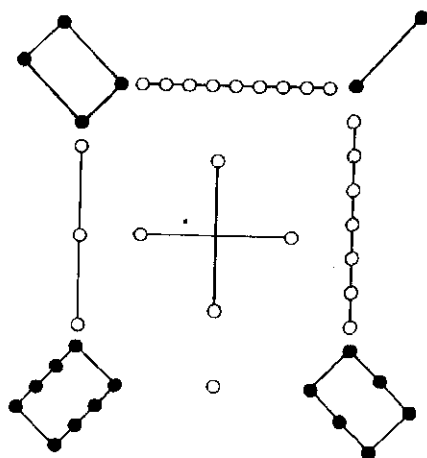
TÁC GIẢ



## MA PHƯƠNG CHÂU Á

Hiện nay còn quá ít tài liệu nói về nền toán học cổ của Trung Quốc. Chắc chắn rằng nền toán học đó cũng vĩ đại, độc đáo tương xứng với nền văn minh Trung Quốc. Có người cho rằng chính Tần Thủy Hoàng đã làm mai một các di sản của nền toán học Trung Quốc, bằng cách ra lệnh đốt sạch sách vở năm 213 trước Công nguyên.

Kinh Dịch là một tài liệu cổ điển mang tính triết học, tôn giáo, xã hội sâu sắc. Trong Kinh Dịch có một số lập luận "kiểu toán học". Một biểu hiện của toán học là hình vẽ sau đây, gọi là lạc thư.



Có thể nói lạc thư là "ông tổ" của các ma phương sau này. Tương truyền, khoảng 2200 năm trước Công nguyên, vua Hạ Vũ thấy một con

rùa đi dọc theo sông Hoàng Hà, trên mai rùa có vẽ hình như trên : nút đen chỉ các số lẻ, nút trắng chỉ các số chẵn. Nhà vua cho rằng đó là một bức thông điệp của Trời...

Cũng nên nhắc lại rằng một ma phương cấp  $n$  là một hình vuông gồm  $n^2$  số nguyên khác nhau được sắp xếp sao cho tổng các số theo hàng ngang, hoặc theo cột dọc, hoặc theo đường chéo, là bằng nhau, và bằng một *hằng số* gọi là *hằng số ma của hình vuông*.

Ma phương gọi là *chuẩn* khi  $n^2$  số là  $n^2$  số nguyên dương đầu tiên.

Người ta chứng minh được rằng hằng số ma của ma phương chuẩn cấp  $n$  là  $\frac{n(n^2+1)}{2}$ .

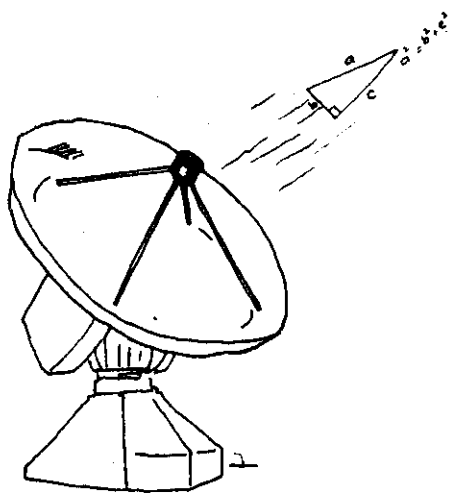


Nghe nói De la Loubère, sứ thần của Louis XIV ở Xiêm La (tên gọi của Thái Lan ngày nay) đã học được phương pháp xây dựng một ma phương chuẩn cấp  $n$  mà hàng số ma là số chẵn bất kì.

Nếu điều đó là đúng, thì đây là lần đầu tiên tác giả ghi nhận một trường hợp "Tây" đi học toán của "Xiêm" !

## ĐỊNH LÍ PITAGO Ở TRUNG QUỐC VÀ ẤN ĐỘ

Có thể nói định lí Pitago là chân lí toán học phổ biến cho đến mức những nền văn minh cổ, tuy chưa có quan hệ với nhau, đã phát hiện ra và sử dụng gần như cùng một lúc.



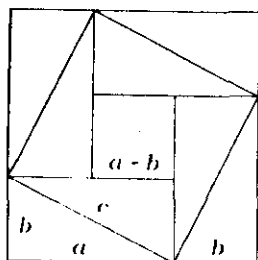
Cũng nên nhắc lại rằng đã có người đề nghị phát lên vũ trụ tín hiệu mà nội dung là định lí Pitago, để bắt liên lạc với văn minh ngoài

hành tinh của chúng ta. Vì, theo họ, nếu có một nền văn minh như thế, thì ắt phải có định lí Pitago !

Sau đây ta nói về cách chứng minh định lí Pitago ở Trung Hoa cổ và Ấn Độ.

#### a) Cách chứng minh của Trung Hoa cổ

Vào thế kỉ thứ 2 nhà toán học Trần Sanh viết trong cuốn "Cửu chương toán thuật" :



Hình vuông có cạnh  $(a + b)$ , có diện tích bằng tổng diện tích hình vuông có cạnh bằng  $c$  và bốn tam giác vuông, do đó

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$$

Mặt khác hình vuông lớn cũng gồm hình vuông nhỏ ở giữa (cạnh bằng  $a - b$ ) và bốn hình chữ nhật vây quanh, tức là

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

Do vậy 
$$c^2 + 2ab = (a-b)^2 + 4ab$$

Suy ra 
$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (đpcm)}$$

#### b) Cách chứng minh của Ấn Độ vào thế kỉ 12

Nhà toán học Bhaskara (mất năm 1114) nêu ra cách chứng minh đơn giản hơn cách chứng minh của Trung Hoa.

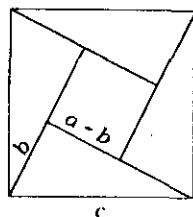
Ông chỉ vẽ hình và ghi rất ngắn "Xem đây !"

Có lẽ Bhaskara muốn nói :

Shình vuông lớn = 4 Shình tam giác + Shình vuông nhỏ

$$c^2 = 4 \frac{ab}{2} + (a-b)^2$$

Suy ra  $c^2 = a^2 + b^2$



(Chắc rằng các nước khác, trong kho tàng văn hóa cổ, cũng có cách chứng minh định lí Pitago)

### III LẠP CỔ ĐẠI QUA BA BÀI TOÁN

Nếu văn học có khả năng và chức năng phản ánh hiện thực, thì toán học, qua các "bài văn chữ toán" cũng cho ta một số thông tin về hiện thực của một xã hội với những nét về sinh hoạt vật chất, tinh thần trong một thời kì nhất định của lịch sử.

Xin trích ra đây một số bài toán trong "Hợp tuyển Hi Lạp" xuất hiện từ thời cổ đại, để các bạn hình dung phần nào xã hội thời đó :

**Bài 1 :** Ông bạn làm gạch ơi, tôi rất vội xây căn nhà này. Hôm nay sáng trời, tôi không cần nhiều gạch nữa đâu vì đã có đủ cả, chỉ thiếu có ba trăm viên. Chỉ một mình ông làm trong một ngày cũng xong. Nhưng nếu con trai ông làm thì mới được hai trăm viên, nó đã nghỉ. Còn thằng con rể của ông, làm được hai trăm năm mươi viên mỗi nghỉ. Nếu ba cha con cùng làm thì liệu mấy ngày mới có đủ số gạch trên, hỡi ông bạn của tôi ?

**Bài 2 :** Tôi là một con sư tử bằng đồng, các vòi nước nơi tôi là hai con mắt, mồm của tôi, và lòng bàn chân phải. Mắt phải của tôi phun đầy bể nước trong hai ngày (mỗi ngày 12 giờ). Mắt trái - trong ba ngày. Và chân tôi - trong bốn ngày. Miệng tôi có thể phun đầy trong 6 giờ. Không hiểu nếu tất cả các vòi đều phun thì bao lâu sẽ đầy ?



(Bể phun nước rất được thịnh hành thời cổ đại. Không biết nước phun bằng cách nào, khi chưa có hệ thống máy nước như hiện nay).

**Bài 3.** Làm một cái mũ miện bằng vàng, đồng, thiếc và sắt nặng 60 minae (tác giả cuốn này cũng không biết minae là bao nhiêu gam). Vàng và đồng sẽ bằng hai phần ba khối lượng đó ; Vàng và thiếc bằng ba phần tư; Vàng và sắt bằng ba phần năm. Tìm các khối lượng vàng, đồng, thiếc và sắt cần có.

(Đây là bài toán thuộc loại "Hệ phương trình tuyến tính". Thế kỉ thứ 4 trước công nguyên Thymaridas đã đưa ra quy tắc giải bài toán

loại này. Quy tắc có tên là "Quy tắc hoa nở". Không biết vì sao quy tắc này có tên đẹp đẽ và độc đáo như vậy.

Chắc là có liên quan đến một bài toán về "thời gian hoa nở lại tàn" !).

$$\frac{\text{YÊU CẦU} \times \text{TRÁI CÂY}}{\text{LẬP LUẬN}} = \text{CÁI SẴN RA}$$

Quy tắc tam suất là quy tắc thông dụng trong số học, hình như được bắt nguồn từ người Hindu.

Trong nhiều thế kỉ, các thương gia rất coi trọng quy tắc này. Cho đến thế kỉ 14 họ cứ làm tính như cái máy, mà không hề biết mối liên hệ giữa quy tắc này với tỉ lệ.

Bramagupta đã phát biểu quy tắc đó như sau :

Trong quy tắc tam suất, Lập luận, Trái cây và Yêu cầu là tên gọi của các số hạng. Các số hạng thứ nhất và thứ ba phải tương tự nhau. Yêu cầu được nhân với Trái cây và chia cho Lập luận là cái Sản ra.

Để minh họa quy tắc tam suất, nhà toán học Bhaskara đã ra bài toán :

"Nếu hai và một nửa pala nghệ tây được mua bằng ba phần bảy niska thì chín niska mua được bao nhiêu pala nghệ tây ?

$\frac{3}{7}$  và 9 là Lập luận và Yêu cầu

$\frac{5}{2}$  là Trái cây.

$$\text{Thế thì Cái sản ra} = \frac{9 \times \left(\frac{5}{2}\right)}{\left(\frac{3}{7}\right)} = 52\frac{1}{2}$$

$$(\text{Ngày nay ta hiểu là tính } x \text{ từ } \frac{x}{9} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{7}})$$

Tại sao gọi là "Yêu cầu", "Trái cây", "Lập luận" ?

Không ai giải thích được, vì có sự pha trộn giữa cái trừu tượng và cái cụ thể một cách rất khó hiểu.

## MÁY TÍNH "NGÓN XÒE, NGÓN CỤP"

Khi con vượn người đầu tiên đứng thẳng trên hai chân sau giải phóng hai chân trước, biến nó thành hai tay, thì cũng là lúc "chất xám" có một bước nhảy vọt mới về chất lượng.

Hai tay không chỉ là công cụ lao động mà còn là công cụ thông tin, giao tiếp, hơn nữa là một máy tính thô sơ bậc nhất, do "Trời" cho.

Các ngón tay, đốt tay, với các kiểu xòe, cụp khác nhau không những dùng để biểu hiện số lượng, mà còn để làm phép tính. Các phép cộng, trừ, nhân, chia đơn giản được thực hiện khéo léo trên hai bàn tay, giúp giảm bớt việc nhớ các con số.

Trong nhiều thế kỷ con người đã làm phép nhân hai số, mà mỗi số lớn hơn 5, bé hơn 10, như sau :

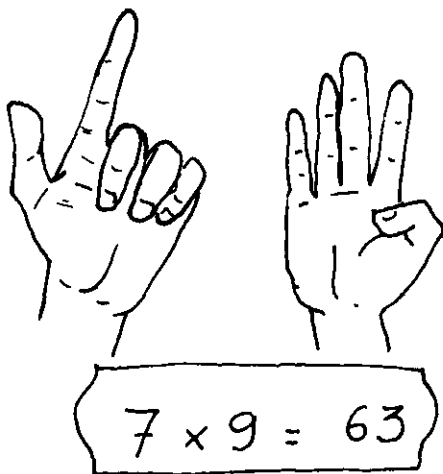
Ví dụ : nhân 7 với 9 :

\*  $7 - 5 = 2$ , trước hết xòe 2 ngón ở bàn tay trái ra

\*  $9 - 5 = 4$ , xòe 4 ngón ở bàn tay phải ra

\* 2 ngón xòe ra + 4 ngón xòe ra = 6 ngón xòe ra

\* Bàn tay trái còn 3 ngón cụp, bàn tay phải còn 1 ngón cụp, vậy  $3 \times 1 = 3$



Kết quả  $7.9 = 63$ .

Một số nông dân ở châu Âu vẫn còn làm phép nhân kiểu này.

Bằng cách này bạn làm phép nhân 8.6 thử xem ! Cơ sở toán học của phép nhân kiểu này là gì ?

Một gợi ý :  $ab = [(a - 5) + (b - 5)] 10 + (10 - a) (10 - b)$ .

Về "kiểu nhân bằng ngón tay" này Alcuin (735 - 804) một nhà bác học Anh thời vua Charlemagne đã viết : "Tôi đã thấy một người cầm số 8 trong tay, từ số 8 đó, anh ta lấy đi số 7, còn lại 6 !". Alcuin muốn nói gì ?

Juvenal, nhà thơ trào phúng (khoảng năm 65 - 128), người Ý, có viết về kiểu nhân này : "Hạnh phúc thay cho kẻ nào đã hoãn được giờ chết của mình và cuối cùng đếm được những năm của đời mình trên bàn tay phải". Giải thích câu này như thế nào ?

## MỘT NHÀ TOÁN HỌC GIÁ DIÊN

Tên tuổi nhà toán học Arập Alhazen (thế kỉ thứ 10) gắn liền với bàn toán Alhazen như sau :

"Từ hai điểm cho trước trong mặt phẳng của một hình tròn cho trước, vẽ hai đường thẳng cắt nhau trên đường tròn, sao cho chúng tạo thành hai góc bằng nhau với đường tròn tại điểm đó".

Bài toán này dẫn đến việc giải phương trình bậc bốn và đã được giải bằng "phương pháp HiLap" là tìm giao điểm giữa một hypebol và một đường tròn.

Ông cũng là tác giả cuốn Quang học, một luận văn có ảnh hưởng lớn ở châu Âu.

Người ta còn lưu truyền câu chuyện "giả điên" của Alhazen.

Câu chuyện như sau : Có một hôm, vì hứng chí, ông "nói phét như thật" rằng ông có thể thiết kế một cái máy có thể điều chỉnh mực nước sông Nil, tránh cho dân gian khỏi nạn lụt hàng năm, gây nhiều đau khổ. Giáo chủ Hakim ở Cairo nghe được, mời ông về nhằm thực hiện công trình vĩ đại đó để cứu dân độ thế. Biết là không thể làm được và sợ bị trừng phạt, ông giả điên cho đến ngày Giáo chủ qua đời vào năm 1021.

(Vào thời đó người điên được bảo vệ và săn sóc rất kĩ).

Thật là thân làm tội đời !

Không biết trong thời gian giả điên, ông có sáng tạo toán học không, nếu có thì cũng phải dấu kết quả đi, vì chân lí toán học khó có thể làm bởi người điên !

## NGUỒN GỐC TỪ ALGEBRA (DẠI SỐ)

Ngày nay ai đã học qua toán học sơ cấp, biết võ vẽ đôi tiếng nước ngoài, đều hiểu "algebra" (tiếng Anh) hoặc "algèbre" (tiếng Pháp) chỉ một môn học gọi là "dại số".

Từ "algebra" là một phần của một tên sách dài "Hisâb aljabr w'al-muqâbalah" của al-Khowârizmi (thế kỉ thứ 9) Ông là nhà toán học Ả-rập, tác giả của một cuốn sách về đại số quan trọng, có ảnh hưởng đến châu Âu, khi được dịch sang tiếng Latinh. Dịch nghĩa đen từng từ, tên sách là "Khoa học về sự thống nhất và đối lập". Khi dịch sang tiếng Latinh, aljabr, hay algebra đồng nghĩa với "khoa học về các phương trình".

Từ aljabr nếu không có dính dáng gì đến khoa học thì lại có một nghĩa khác hẳn, không ngờ tới. Một algebrista là một người thợ nắn xương, và cũng có nghĩa là người thợ cắt tóc, vì thời Trung cổ, người thợ cắt tóc thường kiêm luôn nghề nắn xương, trích máu.

Tên "Khowârizmi" về sau, khi dịch sang tiếng Latinh biến thành Algoritmi, và có nghĩa là thuật toán. ("Khowârizmi nói rằng...", được dịch là "Algoritmi nói rằng...", cũng có nghĩa là "thuật toán nói rằng...")

Gốc các từ trong lượng giác như tang, cotang, sec, cosec cũng dễ hiểu. Tangent là tiếp tuyến, secant là cát tuyến. Tiếp đầu từ "co" là do từ complement, có nghĩa là phần bù.

Riêng từ sin có nguồn gốc khá lạ lùng. Đầu tiên Aryabhata (thế kỉ thứ 5) gọi là jyâ (dây). Người Ả-rập phát âm là jiba, và rồi theo thói quen Ả-rập, nguyên âm được bỏ đi, jiba được viết là jb. Trải qua thời gian jb được biến đổi thành jaib (gồm các chữ cái như của jiba), có nghĩa là "cái vịnh nhỏ".

Cuối cùng Gherardo (khoảng 1150) khi dịch từ tiếng Ả-rập sang tiếng La-tinh đã dùng từ sinus tương đương với jaib.

Từ sin xuất hiện từ đó.

Rõ ràng mỗi từ có một lí lịch của nó. Nhiều trường hợp lực lại lí lịch là một điều rất khó khăn, có khi không làm được.

## MỐI TÌNH DUYÊN NỢ TOÁN - THƠ

Có một nhận xét lí thú là các bài toán cổ thường được trình bày dưới hình thức một bài văn tả cảnh, tả chân dung, với nhiều hình tượng phong phú, hấp dẫn, cách viết sinh động.

Người ta có cảm giác như người ra đề toán làm văn, làm thơ là chính, còn nội dung toán chỉ là cái cớ, thêm vào cho vui.

Điều đó cũng dễ hiểu, vì thời xưa, không có nhà toán học thuần túy, mà chỉ có nhà "bác học", nhà "thông thái", vừa làm thơ, vừa đoán tướng số, vừa làm cố vấn cho vua, có khi vừa làm tướng, vừa là nhà chiêm tinh ...

Ta hãy đọc một đoạn văn - toán sau đây của nhà "toán học" Mahāvīra (khoảng 850) soạn ra :

"Đây là ngoại vi của một khu rừng mát mẻ và đầy ánh sáng, với biết bao cây cối cành nặng trĩu hoa và trái. Nào là cây gioi, cây chanh, chuối lá, cây cau, cây mít, cây chà là, cây hintala, cây thốt nốt, cây punnaga, cây xoài thơm ... Đó là một vùng lấm phượng, nhiều hương, đầy tiếng chim kêu, gà gáy, bên cạnh dòng suối có hoa sen và những chú ong vo ve ...

Một đoàn lữ khách mệt mỏi, vào ngoại vi khu rừng đó để thưởng thức. Họ hái được 63 đồng chuối lá bằng nhau và còn thêm 7 trái nữa. Dem chia đều cho 23 người thì vừa đủ không dư trái nào. Xin cho biết số lượng ít nhất của đồng chuối lá."

Nội dung toán học của đoạn văn - toán trên có thể tóm tắt như sau :

Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình

$$63x + 7 = 23y.$$



## HINDU NGÀY XƯA QUA VÀI BÀI TOÁN CỔ

Sau đây là một số bài toán cổ mà qua đó ta hình dung được phần nào xã hội Hindu ngày xưa.

1. Một thương gia phải đóng thuế bằng một thứ hàng hóa tại ba địa điểm khác nhau. Ở địa điểm thứ nhất hết  $\frac{1}{3}$  số hàng, thứ hai hết  $\frac{1}{4}$  số còn lại, thứ ba hết  $\frac{1}{5}$  số còn lại. Tổng số thuế đã đóng là 24. Vậy số hàng lúc đầu có bao nhiêu ?

(Bài toán này nằm trong bản thảo khai quật được ở Tây Bắc Ấn độ năm 1881).

2. Có một sọt xoài thơm. Nhà vua lấy  $\frac{1}{6}$ , hoàng hậu lấy  $\frac{1}{6}$  số còn lại, ba hoàng tử chính lấy  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$  số còn lại kế tiếp. Còn lại 3 trái cuối cùng cho bé trai nhỏ nhất. Ô, ngài, một người sáng suốt khi giải các bài toán phức tạp về phân số, xin cho biết số trái xoài trong sọt là bao nhiêu.

(Niên đại bài toán khoảng năm 850)

3. Trong một cuộc hành quân để chiếm voi của kẻ thù, ngày đầu tiên nhà vua đi được 2 yojana. Xin đại gia tính thông tính toán cho biết nhà vua phải tăng vận tốc hàng ngày lên bao nhiêu để có thể đến nơi đô thị của kẻ thù cách xa 80 yojana trong một tuần.

(Bài toán do Bhaskara soạn khoảng năm 1150)

4. Trên mười bàn tay của thần Sambu có mười vật : Cái roi, chiếc ghế voi, con rắn, cái trống con, cái sọ người, cây đinh ba, cái khung giường, con dao găm, mũi tên, cái cung.

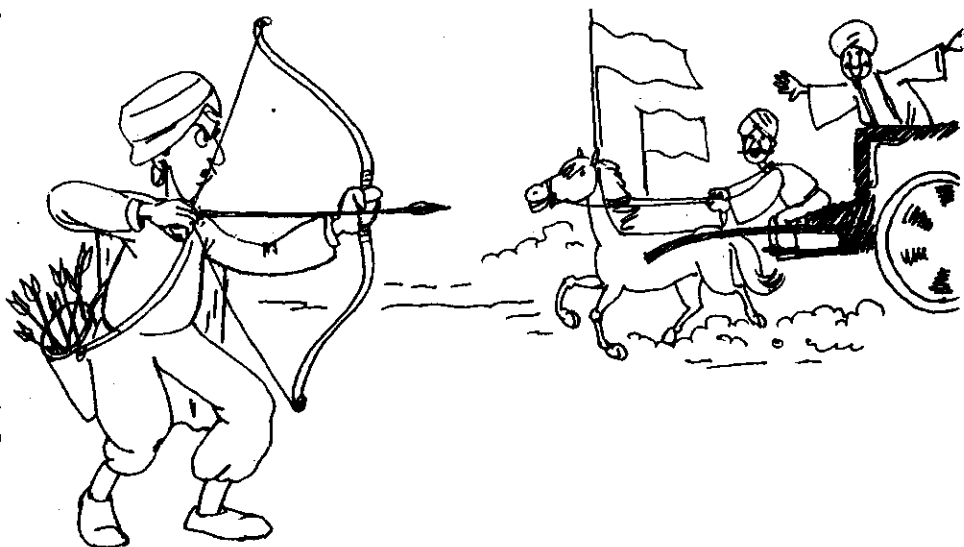
Có bao nhiêu cách làm biến dạng vật này thành vật khác để thứ tự các vật trên mười tay là khác nhau ?

(Bài toán do Bhaskara soạn)

5. Arjuna bừng bừng tức giận. Chàng bắn cả một bao tên để giết cho được Carna. Một nửa số tên dùng để chặn các tên của kẻ thù. Bốn lần căn bậc hai của số tên dùng để giết con ngựa. 6 mũi tên dùng để giết Salya (người đánh xe ngựa của Carna). 3 mũi tên dùng để phá hủy màn chắn, cờ hiệu và các cung. 1 mũi tên dùng để giết Carna.

Hỏi Arjuna đã bắn đi bao nhiêu mũi tên

(Bài toán do Bhaskara soạn)



## TOÁN HỌC VÀ CÂU CHUYỆN TÌNH

Bhaskara là nhà toán học Ấn Độ thế kỉ thứ 12, tác giả cuốn sách toán có tên "Vòng nguyệt quế của một hệ thống thiên văn", viết năm 1150.

Ông cũng là tác giả cuốn sách toán có tên Lilāvati (Cái đẹp) nghiên cứu về số học. Nhiều kiến thức về số học Hindu truyền lại đến ngày nay đều bắt nguồn từ Lilāvati.

Sự tích tên sách Lilāvati cũng mang màu sắc lãng mạn, như một bài thơ tình.

Lilāvati là tên người con gái duy nhất của Bhaskara. Nàng đẹp (tất nhiên ! Vì có đẹp mới thành chuyện), giỏi văn thơ, âm nhạc, thông minh, tài giỏi ... Tóm lại, nàng là kết tinh của "sắc nước, hương trời".

Ngày giờ lễ vu quy của nàng đã được Thần linh báo trước. Nếu sai giờ giấc đó, thì một tai họa ghê gớm sẽ ập lên đầu nàng.

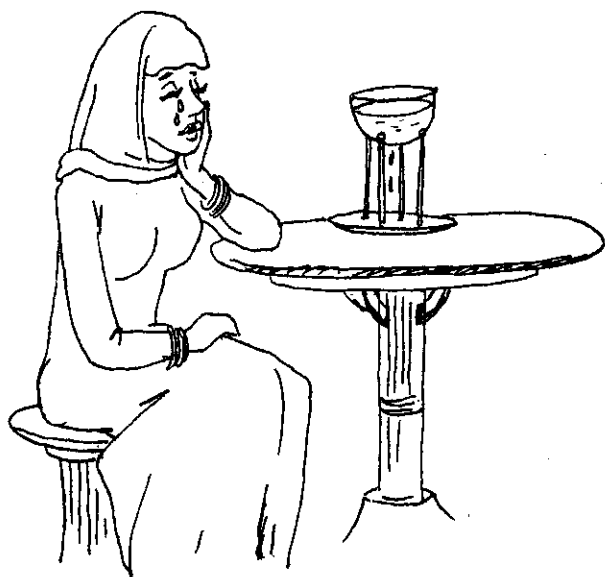
Tất nhiên vào thời điểm quyết định đó, nàng phải ngồi canh từng giọt nước tí tách nhỏ xuống từ một đồng hồ nước hình chén.

Mực nước trong chén nhích xuống dần, rất chậm. Thời gian như ngừng trôi.

Nhưng ... như một số phận được an bài, thời điểm quan trọng nhất trong đời đã trôi qua lúc nào mà nàng không hay.

Nguyên nhân thật là dễ hiểu, nhưng khó tưởng tượng được : Gần giờ "G" đó, hoặc vì nàng mê đi, hoặc vì gió vô tình thổi tung vài sợi tóc, hoặc vì một lí do nào đó mà "Trời mới hiểu" được, viên ngọc cài trên chiếc khăn đội đầu rơi vào chén nước, bít lỗ nước thoát ra. Mực nước cứ đứng tại chỗ mà nàng vẫn có cảm giác như đang nhích dần xuống, đến khi phát hiện được thì đã quá chậm ! Nàng chỉ còn biết khóc than cho số phận của mình.

Để an ủi người con gái yêu quý bất hạnh, Bhaskara đã lấy tên nàng đặt cho tác phẩm toán học của mình. (Khi đọc chuyện này, tác giả liên tưởng đến chuyện Trương Chi". Cũng chén nước, cũng một mối tình bi thảm...)



Nhân tiện đây, cũng xin nói thêm : Phép chứng minh định lí Pitago bằng các tam giác vuông đồng dạng trình bày trong SGK lớp 8 hiện nay (vẽ đường cao lên cạnh huyền), là do Bhaskara viết lần đầu tiên trong sách của mình. John Wallis (1616 - 1703) nhà toán học Anh đã phát hiện ra điều đó, khi nghiên cứu sách toán của Bhaskara. Cách trình bày của Bhaskara là vẽ hình và để "thấy chưa".

### TẠI SAO $\alpha$ , $\beta$ , $\varepsilon$ ?

Eratosthènes, nhà toán học Hi Lạp được nhắc đến khi dùng "sàng Eratosthènes" để nhặt ra các số nguyên tố. Ông người gốc Cyrene, chỉ kém Archimedes vài tuổi. Năm 40 tuổi được nhà Vua mời về Alexandria làm gia sư cho con trai, và giữ chức trưởng thư viện ở

Trường Đại học Alexandria. Nghe nói lúc về già ông bị mù, và tự nguyện nhịn đói đến chết.

Ông là một thiên tài hiếm có. Là nhà toán học, thiên văn học, địa lí, sử gia, nhà thơ, triết gia. Và ... là một lực sĩ biệt danh Pentathlus, nghĩa là nhà vô địch về năm môn điền kinh.

Ông còn được mọi người gọi là Beta ( $\beta$ ). Tại sao  $\beta$  ? Có nhiều giải thích khác nhau :

Ông là người giỏi thứ hai sau Platon (xem như người thứ nhất  $\alpha$ )

Lĩnh vực nào ông cũng giỏi, nhưng "giỏi thứ hai thôi". Các cách giải thích trên không làm một số người hài lòng, khi so sánh ông với Apollonius, được gọi là Epsilon (thứ năm)

Nhà sử học James Gen lập luận rằng : Beta (2) và Epsilon (5) là tên số phòng của các ông hàng ngày làm việc. Thay vì gọi tên người ta gọi số phòng.

Sự việc càng rắc rối hơn khi người ta biết rằng Apollonius nghiên cứu Mặt Trăng, mà Mặt Trăng thì được kí hiệu là Epsilon.

Cũng nên nhắc lại rằng Erastosthènes, khoảng 230 năm trước Công nguyên, đã đo chu vi Trái Đất bằng que và dây và ... bóng nắng.

## TÍNH CHU VI TRÁI ĐẤT BẰNG QUE VÀ DÂY

Ngày nay, với những vệ tinh thám hiểm không gian, việc quan sát đo đạc Trái Đất, Mặt Trăng, các thiên thể khác, là một việc làm trong tầm tay của Con người.

Mức độ chính xác đến mức kì dị : Vệ tinh có thể gửi về Trái Đất những bức hình chụp các vết do xích xe tăng để lại trên đường chuyển quân ...

Sự kiện trên càng làm nổi bật tính "vĩ đại" của người xưa khi đo Trái Đất bằng những công cụ "siêu thô sơ", đó là que và dây !

Erastosthènes (Khoảng 230 năm trước Công nguyên) đã tiến hành việc tính chu vi Trái Đất như sau :

Ông quan sát thấy rằng giữa trưa ngày hạ chí, ở tại Cyrene thì một cái gậy dựng đứng sẽ không có bóng. Tại thời điểm đó, thì ở Alexandria tia nắng nghiêng đi  $1/50$  của vòng toàn phần so với vòng Kinh tuyến. Từ đó ông suy ra rằng khoảng cách giữa hai thành phố là 5000 stade và do đó, chu vi Trái Đất là 250.000 stade.

(Sau này người ta thấy rằng  $1 \text{ Stade} \approx 559 \text{ foot}$ ).

Và sau đó Ông cho đo dài đường kinh Trái Đất ...

Ngày nay khi nhìn lại cố gắng của người xưa trong việc tìm hiểu thiên nhiên, vũ trụ, với những công cụ "que và dây" ta càng thấm thía câu "Chúng ta lớn, vì chúng ta đứng trên vai những người khổng lồ."

## GẮN NHƯ CHẮC CHẮN CÓ NGƯỜI TRÊN SAO HÒA ?

Đối thoại sau đây có dính líu một chút đến kiến thức xác suất. Nhưng không sao, bạn có thể bỏ qua các phép tính, để thấy tính "nghịch lí", tính "hài hước" của vấn đề, khi áp dụng một cách máy móc toán học vào một lĩnh vực mơ hồ, "siêu toán".

Sau đây là cuộc đối thoại giữa "TÚ XE" (tout sais) và "BẦY LẮC"

TX : Này B.L, theo ý anh, "xác suất có sự sống trên sao hỏa", dưới dạng này hay dạng khác, là bao nhiêu ?

**BL :** Hừm ... Để mình nghĩ xem. Vì mình không có một thông tin nào về việc này, mình phải cho là "cũng có thể có, mà cũng có thể không", "khả năng có" và "khả năng không" là bằng nhau. Vậy thì, theo mình, tốt nhất là câu trả lời :

Xác suất có sự sống trên sao hỏa là  $\frac{1}{2}$

**T.X :** Tốt lắm ! Bây giờ ta xét vấn đề dưới một khía cạnh khác. Anh cho rằng "xác suất không có ngựa trên Sao Hỏa" là bao nhiêu ?

**B.L :** Theo sự thận trọng đã nói ở trên, mình cho rằng xác suất đó là  $\frac{1}{2}$  không hơn không kém

**T.X :** Và "xác suất không có bò cái trên Sao Hỏa"

**B.L :** Cũng bằng  $\frac{1}{2}$

**T.X :** Xác suất không có chó trên Sao Hỏa

**B.L :** Tất nhiên cũng bằng  $\frac{1}{2}$

(Họ cứ như thế mà nói chuyện với nhau. TX đưa ra 17 giống vật khác nữa...)

**T.X :** Tốt lắm ! Vậy thì "xác suất không có đồng thời ngựa, bò cái, chó ... và 17 giống khác nữa" theo công thức đã học là tích  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \frac{1}{2}$  : với 20 thừa số, tức  $\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{1048576}$ , anh có công nhận như vậy không ?

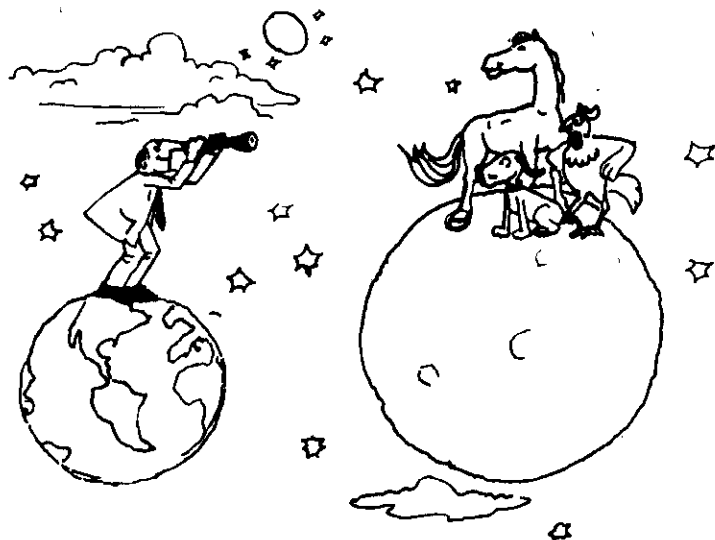
**B.L** (bất đầu thấy hoang mang) : Vâng, tôi thấy như vậy cũng đúng, không có gì đáng nghi ngờ.

T.X : Cảm ơn. Vậy thì nếu "xác suất không có giống nào trong các giống vật ấy là  $\frac{1}{1048576}$ " thì "xác suất có ít nhất một trong các giống vật ấy" là bao nhiêu.

B.L : Theo công thức thì đó là hiệu  $1 - \frac{1}{1048576} \approx 0,999999$

T.X : Vậy thì, thưa ông Bảy Lắc, chúng ta đã có hai kết luận về "xác suất có sự sống trên Sao Hỏa" đó là 0,5 và một số gần bằng 0,999999. Một trong hai kết luận đó chắc chắn là sai. Có phải nguyên nhân của tình trạng này là do "sự suy luận dựa trên cái không biết" mà ra ?

Thật tội nghiệp cho Bảy Lắc ! Tú Xe đã dẫn ông ta vào "mê hồn trận".



Bây giờ ta thử bình tĩnh lí giải vấn đề trên xem có cái gì bên trong chưa ổn.

Chú ý là lập luận trên đã dựa vào hai giả thiết.

Trong cả hai kết luận, ta đã giả thiết rằng ta không biết gì hết về biến cố "có hay không có sự sống trên Sao Hỏa". Trong kết luận thứ hai ta đã giả thiết rằng "sự tồn tại của các sự sống khác nhau" là các biến cố độc lập (tức biến cố này xảy ra hay không, không có liên quan gì đến biến cố khác).

Do đó mà ta mới áp dụng định lí nhân xác suất của các biến cố độc lập.

Rõ ràng hai giả thiết đã được đặt ra là hoàn toàn hợp pháp về mặt lôgic hình thức, nhưng không gian của chúng ta là một không gian giả định, chỉ tồn tại trong trí tưởng tượng của con người.

Khi đặt hai giả thiết đó vào không gian thực mà chúng ta đang sống, ta thấy sự khập khiễng không dung hòa được.

Chúng ta "biết" vài điều gì đấy về Sao Hỏa và "biết" vài điều gì đấy về quan hệ của các dạng của sự sống trên Sao Hỏa. Hai điều đó đủ để làm cho lí luận của Tú Xe trở nên "bất hợp pháp", nói cách khác, đã vô hiệu hóa lí luận của Tú Xe.

## CÁC NGHỊCH LÍ NỔI TIẾNG CỦA ZÉNON

Khoảng thế kỉ thứ 5 trước Công nguyên, Zénon, nhà triết học, nhà toán học Hy Lạp cổ đã đưa ra những nghịch lí nổi tiếng mà 25 thế kỉ qua, người ta vẫn còn thảo luận về tính chất triết học sâu xa của chúng.

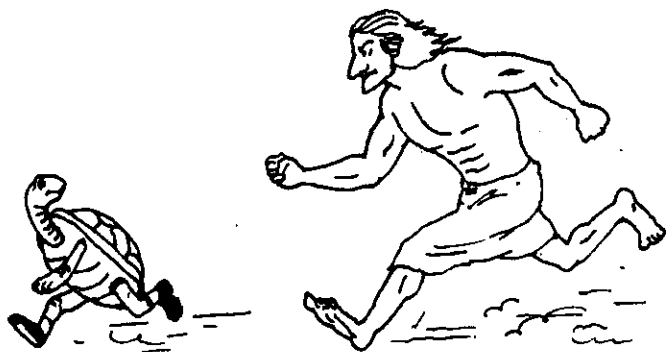
**Nghịch lí thứ nhất :** Zénon "chứng minh" rằng "Sự chuyển động là không thể thực hiện được".

Ông lập luận như sau :

"Muốn đi từ P đến Q phải qua trung điểm của PQ. Muốn đi đến trung điểm của PQ phải đi qua trung điểm của phần còn lại v.v... Quá trình "qua trung điểm phần còn lại" không bao giờ chấm dứt, vì phần còn lại bao giờ cũng tồn tại. Vậy không thể nào có chuyển động được để đi từ P đến Q".

Một cách trực quan hơn, với lí luận đó, mũi tên P không bao giờ bắn đúng được đích Q, vì bao giờ cũng còn đoạn đường chưa qua.

Nghịch lí thứ hai : Lực sĩ Achille không bao giờ đuổi kịp con rùa đi trước ông ta vì khi Achille đến chỗ con rùa, thì nó đã đi được một đoạn. Achille đuổi được đoạn đó thì rùa đã đi được một đoạn mới. Cứ như thế Achille bao giờ cũng còn "đoạn mới" để đuổi theo. Vậy Achille không bao giờ đuổi kịp rùa.



Hai nghịch lí của Zénon có liên quan đến tính liên tục và câu hỏi:  
"Tổng vô hạn các đại lượng hữu hạn là vô hạn hay hữu hạn ?"

Vấn đề vô hạn là vấn đề làm bao nhiêu nhà toán học, từ bao nhiêu thế kỉ quan tâm giải quyết.

Ở đây ta không đi sâu vấn đề này, nhưng ta bác bỏ nghịch lí "con rùa với Achille" bằng một phép tính không mấy khó khăn : Giả sử Achille cách rùa 100m, vận tốc Achille là 10 m/s và vận tốc rùa là 1m/s

Thời gian Achille đuổi kịp rùa là tổng vô hạn :

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

Tổng cấp số nhân lùi vô hạn này là  $S = 11 \frac{1}{9}$  giây.

Vậy Achille đuổi kịp rùa là hiển nhiên !

## NIHỮNG NGHỊCH LÍ SUY RA TỪ TIỀN ĐỀ CHỌN

Có vô số cái túi đựng kẹo (vô hạn túi) - Mỗi túi đựng vô số kẹo (vô hạn kẹo). Một em bé đem theo một cái túi rỗng, lấy trong mỗi túi kẹo một chiếc kẹo và lấy đúng một chiếc mà thôi, bỏ vào túi của mình. Cuối cùng cái túi rỗng của em bé đã có kẹo và có vô số kẹo (vô hạn). Nói cách khác từ trong vô số túi kẹo, nếu từ mỗi túi em bé chỉ chọn một chiếc thôi, thì em bé cũng có vô số kẹo. Đó là nội dung của một tiên đề toán học rất quan trọng có tên là tiên đề chọn.

Từ tiên đề này người ta suy ra lắm điều kì dị, như những nhà ảo thuật vậy : Từ một quả cầu, nếu chia thành bốn phần bằng nhau, thì có thể tạo thành hai quả cầu, mà mỗi quả cầu lại lớn bằng quả cầu đầu tiên. Tất nhiên từ hai quả cầu mới lại có thể tạo thành bốn quả cầu, v.v...

Rõ ràng lập luận đó hoàn toàn có tính chất lí thuyết. Nếu không thì chỉ cần có một kilôgam gạo cũng có thể nuôi cả nhân loại !



Nghịch lí trên là do tiên đề chọn nà sinh ra. Tiên đề chọn làm cho nhiều nhà toán học lúng túng, vì nó sinh ra nhiều điều kì dị.

Để tránh việc lạm dụng tiên đề này các nhà toán học quy ước với nhau : Ai dùng thì cứ dùng, nhưng khi dùng thì xin báo cho mọi người biết "A lô ! Tôi có dùng tiên đề chọn đây, xin mọi người chú ý !"

Chẳng khác nào ai nghiện thuốc lá thì xin báo cho nhân viên đường sắt biết, để được xếp vào toa dành cho người nghiện. Trong toa đó mọi người tha hồ hút với nhau ...

## NGHỊCH LÝ GIỖN VALIXƠ

Giỗn Valixơ là nhà toán học Anh thế kỉ 17. Ông là nhà toán học Anh đầu tiên nghiên cứu "giải tích các đại lượng vô cùng bé". Ông cũng là người đầu tiên định lượng tích phân xác định, xem như đó là giới hạn tỉ số của dãy số, độc lập với khái niệm diện tích.

Valixơ đưa ra "biểu thức Valixơ"

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5.7.7...}{2.4.4.6.6.8.8...}$$

Ông là người sử dụng dấu tiên dấu  $\infty$  để chỉ vô cực, và cũng là người nêu ra (nhưng chưa chứng minh chặt chẽ) mệnh đề tương đương với tiên đề 5 của hệ tiên đề Óclit : Có hai tam giác đồng dạng (mà không bằng nhau).

Ông có nêu ra một nghịch lí sau đây :

"Từ bất đẳng thức  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  cho số tự nhiên  $n$

suy ra ...  $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2}$ , nghĩa là suy ra  $\infty < -1$ !"

Nghịch lí này có tên là "nghịch lí "Valixơ"

Mọi người có học toán đều biết rằng  $\frac{1}{0}$  không biểu thị cho số nào hết.

Công trình của Valixơ có ảnh hưởng đến nhà bác học Niutơn.

## CÁI VÒNG LUẬN QUẢN

Năm 1919 trong cuốn "Nhập môn về Triết học của toán học" Bertrand Russel đã phát biểu một câu đại ý :

"Toán học và logic học, về mặt lịch sử là hai ngành khác nhau. Nhưng trong quá trình phát triển, chúng sát lại gần nhau : logic học đã "toán hóa" hơn, và toán học đã "logic hóa" hơn. Ngày nay khó mà vạch ra một đường ranh dứt khoát phân chia toán học và logic học. Trên thực tế ngày nay chúng gần như là một. Bằng chứng về sự đồng nhất của chúng thể hiện trong những chi tiết : xuất phát từ các tiên đề và các phương pháp suy luận, ta đã đứng trên mảnh đất của logic, nhưng khi đi đến những kết quả bằng phương pháp suy diễn ta đã đứng trên mảnh đất của toán".

Quan hệ máu thịt giữa logic và toán thể hiện ra ở chỗ các mâu thuẫn về logic cũng làm cho toán học lúng túng, nếu không muốn nói là rúng động đến mức khủng hoảng.

Ở đây ta không đi sâu vào cách giải quyết các mâu thuẫn đó, ta chỉ nêu ra một số nghịch lí thể hiện các mâu thuẫn đó.

*Nghịch lí thứ nhất* có lẽ được đưa ra vào thế kỉ thứ 6 trước Công nguyên, khi Epiménide, nhà thơ và nhà tiên tri nổi tiếng của xứ Crète phát biểu :

"Tất cả dân xứ Crète đều là kẻ nói dối". Để bộc lộ rõ tính chất nghịch lí của câu phát biểu ta viết câu đó như sau : "Tất cả những lời phát biểu do dân xứ Crète nói ra, đều là sai".

Mới nghe thì tưởng rằng câu đó chẳng có một chút gì xa lạ. Tựa như câu "Tất cả các ngôi sao đều lặn hết", "Tất cả các cuốn sách xuất

bản năm nay đều chẳng hay", "Tất cả những người dân trong làng này đều làm nghề đánh cá".

Nhưng sự phức tạp xuất phát từ chỗ Epiménide, tác giả câu nói, chính là một người dân xứ Crète. Vì ông ta là dân xứ Crète nên lời phát biểu của ông ta sai, vậy lời phát biểu đó phải hiểu là "tất cả những lời phát biểu do dân xứ Crète nói ra đều đúng". Nhưng nếu như thế thì lời phát biểu của ông ta đúng, (vì ông là dân xứ Crète), nghĩa là tất cả lời phát biểu của dân xứ Crète đều sai, v.v... Ta rơi vào vòng luẩn quẩn, tự mình lại phản bác lời khẳng định của mình.

Để rõ hơn tính nghịch lí của câu trên, ta sắp xếp lại lập luận :

- (1) Tất cả những lời phát biểu do dân xứ Crète nói ra đều là sai
- (2) Lời phát biểu (1) do một người dân xứ Crète nói ra
- (3) Vậy lời phát biểu (1) là sai.

(4) Vậy tất cả những lời phát biểu do dân xứ Crète nói ra là không sai.

Như vậy (1) và (4) không thể cùng là đúng cả, trong khi chính (4) được suy ra từ (1). Vậy phát biểu (1) tự nó mâu thuẫn.

*Nghịch lí thứ hai* do nhà ngụ biện Protagoras đưa ra vào thế kỉ thứ 5 trước Công nguyên. Tục truyền rằng Protagoras đã thỏa thuận với một người học trò của ông ta rằng người đó sẽ thưởng công dạy học của ông, nếu người đó thắng trong vụ kiện đầu tiên ở tòa án. Sau thời gian dạy học, Protagoras chờ mãi không thấy người học trò thưởng công như đã hứa. Protagoras kiện người học trò ở tòa án. Ông nói với anh ta :

"Nếu ta thắng kiện, anh phải trả tiền cho ta theo quyết định của tòa án. Nếu anh thắng kiện, anh cũng phải trả tiền cho ta theo sự thỏa

thuận giữa hai bên. Nghĩa là đằng nào ta cũng nhận được tiền". Người học trò cũng không vừa, trả lời :

"Nếu tôi thắng, thì theo quyết định của tòa, tôi không phải trả tiền cho ông. Nếu ông thắng, tức tôi thua kiện, thì theo sự thỏa thuận giữa hai bên, tôi cũng không phải trả tiền cho ông. Đằng nào thì tôi cũng không phải trả tiền".

Vậy thì ai nói có lí ?

*Nghịch lí thứ ba.* Không biết xuất phát từ đâu, nội dung như sau: Một người thợ cạo nói rằng anh ta không cạo râu cho người nào tự cạo râu, mà chỉ cạo râu cho người nào không tự cạo râu.

Vậy đối với bản thân anh ta, anh ta có cạo râu không ?

Các bạn sẽ thấy rằng, anh ta tự cạo râu, hoặc không tự cạo râu, đều mâu thuẫn với lời phát biểu của mình.

Qua các ví dụ trên ta rút ra nhận xét gì ? Bản chất của sự mâu thuẫn trong các mệnh đề là gì ?

Trước hết ta có nhận xét rằng tất cả các nghịch lí đều có một tính chất chung : chúng nói về "tất cả" những phần tử của một số tập hợp nào đó, mà bản thân các lời phát biểu, hoặc là các đối tượng mà chúng nói đến, cũng là các phần tử của những tập hợp ấy.



Tính chất chung ấy được bộc lộ một cách rõ ràng hay kín đáo, tùy trường hợp.

Ta trở lại các ví dụ đã nêu trên kia.

"Tất cả những lời phát biểu do dân xứ Crète nói ra, đều sai". Nhưng vì lời phát biểu đó do một người dân xứ Crète nói ra, nên nó là một phần tử của tập hợp các lời phát biểu của dân xứ Crète.

Tính chất chung ở đây là rõ ràng.

Trong "nghịch lí Protagoras", ta nói đến tập hợp tất cả những vụ kiện mà người học trò tham gia ở tòa án, trong đó có vụ kiện mà anh ta là một người bị kiện.

Trong "nghịch lí cạo râu", ta nói đến tập hợp những người tự cạo râu, hoặc không tự cạo râu. Bản thân người thợ cạo cũng nằm trong tập hợp đó.

Rất khó mà tránh cái vòng lẩn quẩn. Khi nói đến "tất cả" những phần tử của một tập hợp nào đó, mà bản thân lời phát biểu, hay các đối tượng mà lời phát biểu đề cập đến, lại là phần tử của tập hợp đó.

Từ năm 1906 Bertrand Russel đã tìm cách tránh các mâu thuẫn sinh ra khi nói đến "tất cả" những phần tử của một tập hợp bằng cách cho rằng : những thực thể logic, lời phát biểu, quy tắc, đối tượng v.v... không phải cùng một loại (type), cùng một bậc thang đối tượng.

Một phát biểu nào đó, nói đến các đối tượng nào đó, thì các đối tượng đó là một loại, còn bản thân lời phát biểu là một loại khác.

Ví dụ : "Tất cả những lời phát biểu của dân xứ Crète là sai" . Những "lời phát biểu" ở đây là những lời phát biểu về các đối tượng. Còn bản thân "lời phát biểu" không phải là lời phát biểu về các đối tượng, mà là "lời phát biểu về lời phát biểu nói về các đối tượng". Đó là

lời phát biểu thuộc một kiểu khác, không thể áp dụng vào tự bản thân nó.

Ta dừng ở đây, vì đã đi hơi xa vào một lĩnh vực trừu tượng, ngoài yêu cầu khiêm tốn của cuốn sách này...

## NGHỊCH LÝ CỦA GALILÊ

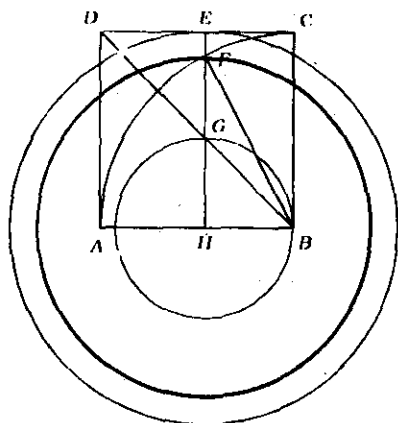
Nghịch lý sau đây xuất hiện từ gần 300 năm trước trong cuốn "Đối thoại về hai khoa học mới", do Galilê viết.

Nghịch lý này nói lên sự lúng túng mà các nhà khoa học thời đó vấp phải khi thử sử dụng khái niệm vô hạn trong hình học.

Tên của nghịch lý là "Một điểm bằng đường tròn".

Lấy hình vuông ABCD. Kẻ đường chéo BD. Lấy B làm tâm, vẽ đường tròn bán kính bằng BC, có  $\frac{1}{4}$  đường tròn CFA.

Kẻ HE song song với BC, cắt  $\frac{1}{4}$  đường tròn ở F, và đường chéo BD ở G. Lấy H làm tâm vẽ các đường tròn bán kính lần lượt là HG, HF và HE.



Ta chứng minh được diện tích hình tròn tâm H, bán kính HG bằng diện tích hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn (H; HE) và (H; HF). Thật vậy từ  $HB^2 = BF^2 - HF^2$  và  $HB = HG$ ,  $BF = BC = HE$  ta có  $HG^2 = HE^2 - HF^2$ . Do đó  $\pi HG^2 = \pi HE^2 - \pi HF^2$

Đó là điều ta phải chứng minh.

Bây giờ ta tưởng tượng H tiến tới B và trùng với B.

Lúc đó hình tròn thu lại thành một điểm, hình vành khăn thành đường tròn tâm B, bán kính BC.

Vì diện tích hình tròn luôn bằng diện tích hình vành khăn dù H ở vị trí nào trên AB nên ta suy ra "một điểm bằng một đường tròn" !

Điều nghịch lý trên được giải một cách không khó khăn nếu ta nhớ lại rằng diện tích của điểm, của đường tròn đều bằng zero (bằng 0).

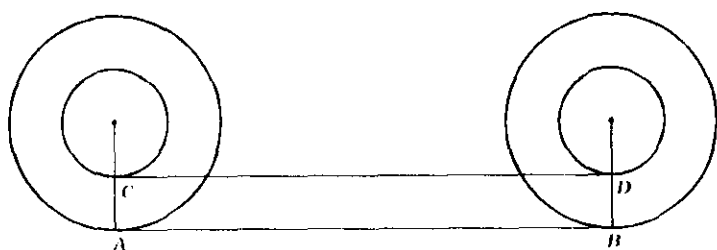
Sự "nhập nhằng" ở đây là ở chỗ hiểu khái niệm "bằng" một cách lẫn lộn, nói cách khác đánh tráo khái niệm "bằng về hình dạng" và "bằng về diện tích".

## NGHỊCH LÝ GALILÊ – BÁNH XE ARISTOTE.

Galilê đưa ra nghịch lý sau đây năm 1638 trong cuốn Discorsi.

Sự thực, nghịch lý này đã được Aristote mô tả, do đó đôi khi còn gọi là "bánh xe Aristote".

Nghịch lý như sau (xem hình vẽ)



Bánh xe lớn quay một vòng bằng chu vi, từ A đến B, thì bánh xe nhỏ (đồng tâm) cũng quay một vòng bằng chu vi từ C đến D. Vì  $AB = CD$  nên suy ra chu vi đường tròn lớn bằng chu vi đường tròn nhỏ !

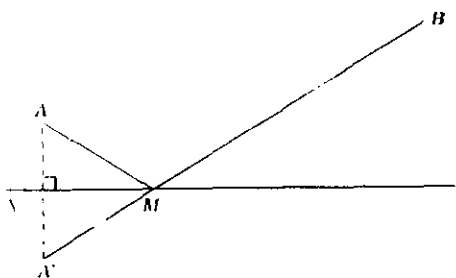
Ai cũng thấy là vô lí. Nhưng giải thích tại sao vô lí thì không phải ai cũng thấy ngay.

Để các bạn suy nghĩ giải trí !

## BÀI TOÁN HÌNH LỚP 7 ĐÃ CÓ CÁCH ĐÂY 2000 NĂM

Trong "Bài tập hình 7" có bài toán mà nội dung hình học là : Trên cùng một nửa mặt phẳng định bởi đường thẳng  $\Delta$ , lấy hai điểm A, B, cố định.

Tìm điểm M thuộc  $\Delta$  sao cho  $AM + MB$  nhỏ nhất.



Bài toán này thường hay cho dưới dạng : Tìm một điểm  $M$  trên bờ sông để xây cảng, sao cho tổng độ dài  $MA + MB$  từ  $M$  đến hai nhà máy  $A, B$  là nhỏ nhất ...v.v.

Bằng hình học sơ cấp đơn giản, ta chứng minh được  $M$  là giao điểm của  $A'B$  với  $\Delta$  trong đó  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $\Delta$ .

Bạn có biết không, kết luận này do Hêrông Alexandri tìm ra từ hơn 2000 năm trước..

Chú ý là nếu  $\Delta$  là mặt gương thì tia sáng  $AM$  được phản xạ thành tia  $MB$ .

Trong trường hợp nào tia sáng cũng "ràng" đi theo đường ngắn nhất.

## NHẠC SĨ MÔDA VÀ CON SỐ 18

Giáo sư tiến sĩ Aivor Grêttên Ginnes, nhà nghiên cứu lịch sử toán học và logic của Trường Đại học tổng hợp Êxêch đã có một phát hiện bất ngờ thú vị về mối liên hệ giữa tác phẩm của Môda với con số 18.

Khi phân tích nhạc và lời tác phẩm "Ổng sáo thần kì" của Môda ông thấy :

- + Tập hợp xung quanh nhà thông thái Daractro là 18 môn đệ.
- + Một số khúc ca của vở nhạc kịch bắt đầu bằng 18 nốt nhạc.
- + 180 nhịp của phần ca ứng với 18 lần xuất hiện các nhân vật trên sân khấu.
- + Áp phích quảng cáo vở nhạc kịch này có 18 dòng.

Nhà sử học Hêrôđot đã từng luận về con số 18 đối với người Ai Cập cổ đại. Theo ông, con số 18 không phải là một con số bình thường như mọi con số khác, mà là một con số đặc biệt, có thể nói là "thần bí" đối với nền văn hóa và tôn giáo Ai Cập cổ đại.

Khi Môda sáng tác nhạc, ông có chú ý đến số 18 không, hay chỉ là một sự tình cờ ?

Cần nhớ là người đời có thói quen thù ghét những điều bí ẩn xung quanh cuộc đời các danh nhân...

## TRẠNG QUỲNH DỨC QUỐC A DAM RIESE THI VẼ

Trong kho tàng truyện dân gian Việt Nam có truyện "Trạng Quỳnh thi vẽ" : Trạng Quỳnh chấm mười ngón tay vào nghiền mực, vẽ ngằn ngoè lên giấy. Ba tiếng trống vừa dứt, Trạng Quỳnh đã vẽ được hàng mấy tá con vật (con giun), trong khi đối phương mới vẽ được mấy con hổ. Trạng Quỳnh thắng nhờ trí thông minh, tài tháo vát.

Trong toán học cũng có một cuộc thi vẽ như vậy. Trạng Quỳnh ở đây là Adam Riese, nhà toán học Đức (khoảng 1489 \_ 1559), tác giả của một cuốn số học nổi tiếng về tính thực dụng, công bố năm 1522. Cuốn sách này được ưa chuộng cho đến mức ngày nay ở Đức, cụm từ nach Adam Riese (theo A. R) đồng nghĩa với "phép tính toán đúng".

Câu chuyện thi vẽ như sau :

Adam Riese thi với một nhà thiết kế đồ án xem ai vẽ được nhiều góc vuông nhất trong một phút. Giờ thi bắt đầu, nhà thiết kế đem đồ nghề ra, gồm thước và compas, theo đúng bài học dựng hình cơ bản trong sách giáo khoa, cặm cụi vẽ góc vuông.



Adam Riese chỉ vẽ một đường tròn, và từ đó vẽ vô số các góc vuông nội tiếp trong nửa đường tròn. Số góc vuông ông vẽ nhiều hơn hẳn. Ông đã **đễ dàng thắng** cuộc nhờ áp dụng định lí về "góc nội tiếp trong nửa đường tròn", và trước hết, là nhờ nhanh trí...

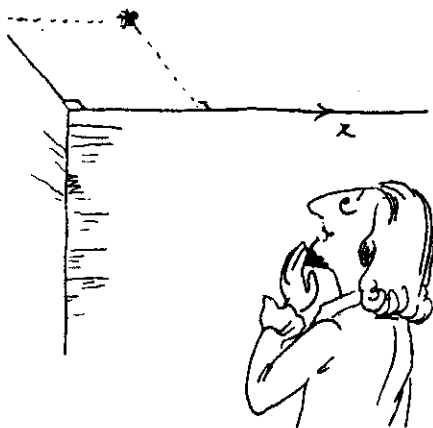
Các bạn thử nghĩ xem, nếu thi vẽ tam giác đều, thì làm cách nào để thắng cuộc một cách chắc chắn ?

## TỪ CON RUỒI ĐẾN TỌA ĐỘ ĐỀCÁC

Khi nói đến **Định luật hấp dẫn** của Niuton người ta thường kể "câu chuyện quả táo rơi" : Một buổi trưa hè, sau bữa cơm, Niuton ra vườn, nằm nghỉ dưới gốc cây táo. Bỗng ông thấy quả táo rơi... Hiện tượng bình thường đó không hiểu sao lại đánh thức trong ông một suy nghĩ đặc biệt về lực hút của Quả Đất. Và sau đó định luật hấp dẫn ra đời.

Khi nói đến phương pháp tọa độ của Đềcác người ta cũng kể ra một câu chuyện dẫn đến sự gợi ý cho Đềcác phát minh quan trọng đó :

Một hôm Đécác quan sát một con ruồi bò trên trần nhà. Ông có nhận xét rằng đường đi của con ruồi hoàn toàn có thể xác định được nếu biết được mối liên hệ giữa các đoạn thẳng nối từ con ruồi đó đến giao tuyến giữa hai bức tường kề nhau với trần nhà. (Ngày nay ta hiểu là hoành độ và tung độ của một điểm trong hệ trục tọa độ vuông góc).



Nội dung câu chuyện rất tự nhiên và hữu lí, còn sự thật như thế nào thì không biết được.

Cũng có tài liệu nói rằng Đécác "thấy" được phương pháp tọa độ trong giấc mơ. Từ giấc mơ đẹp đẽ đó, phương pháp tọa độ ra đời...

## LÀM THƠ THEO LỐI TOÁN HỌC

Toán học nhiều khi can thiệp khá "thô bạo" vào thơ. Không phải do nhà toán học nào có đầu óc "học phiệt", mà chính do các nhà thơ "tự mình lấy toán buộc mình khó thêm".

Cấu trúc "lục bát", "song thất lục bát" của Việt Nam ta chẳng ăn thua gì với luật thơ Sestine ở Đức, xuất phát từ thời đại nghệ thuật Ba-rốc thế kỷ 17, do nhà thơ Đức Friedrich Ruckert đưa ra.

Sestine là bài thơ không vần gồm 6 đoạn, mỗi đoạn 6 câu, câu cuối có 6 từ.

Nếu câu cuối của đoạn một gồm sáu từ đánh số là 1, 2, 3, 4, 5, 6, thì đoạn hai câu cuối cũng phải dùng các từ ấy với cách sắp xếp là 6, 1, 5, 2, 4, 3.

Đoạn 3 thì câu cuối là 3, 6, 4, 1, 2, 5, v.v... Như vậy, 6 câu cuối của 6 đoạn thơ Sestine được lập lại theo thứ tự các từ là

1, 2, 3, 4, 5, 6 ; 6, 1, 5, 2, 4, 3 ;

3, 6, 4, 1, 2, 5 ; 5, 3, 2, 6, 1, 4 ;

4, 5, 1, 3, 6, 2 ; 2, 4, 6, 5, 3, 1 .

Bạn đọc thử tìm quy luật sắp xếp các từ câu cuối, từ đoạn một đến đoạn sáu.

Nếu tiếp tục, rõ ràng câu cuối lại trở về như cũ. Như vậy Sestine không bao giờ có đoạn thứ 7.

Bạn hãy tính thử xem nếu câu cuối của Sestine có 8 từ thì nó có mấy đoạn để câu cuối khỏi lập lại y nguyên ? (Đáp số : 4)

Cần nói thêm là gốc xa xưa nhất của Sestine là hình thức thơ trữ tình ở Provence, và theo nhà toán học SEDLÁČEK của Tiệp, chính nhà thơ của Sec Jaroslav Urehlický đã đưa kiểu thơ Sestine vào đất nước Tiệp.

## JOSEPHE VÀ BÀI TOÁN CHƯA CÓ LỜI GIẢI

Toán học và Lịch sử cổ đại hình như có một duyên nợ gì với nhau. Rất nhiều bài toán độc đáo gắn liền với giai thoại về một Hoàng đế, một vĩ nhân thời Cổ Hi-La, thời Cổ Trung Hoa, hoặc một câu chuyện lí thú về sinh hoạt cung đình, hội hè, đình đám dân gian (Chuyện Hoàng đế IBN AL KUZ cân vàng; Hàn Tín điểm binh; Ba tên cướp của Tần Cửu Thiệu; Bàn cờ tướng của Ấn Độ; Bài toán về tuổi khắc trên mộ Diophant v.v...)

Sau đây là một giai thoại toán học thời Cổ Hi Lạp. Vespasien là Hoàng đế La Mã từ năm 69 đến 79 theo Công lịch. Ông ta có đức tính kiên nghị, nhưng cũng có lối sinh hoạt "binh dân", thích hài hước một cách dân già. Ông đặt nền móng cho một cấu trúc nhà nước đế quốc quy mô : lập viện dân biểu, xây dựng nền tài chính. Chính ông là người cho xây dựng nhà hát lộ thiên Colisée vĩ đại, chứa được 8 vạn khán giả. Ở đó các người tử vì đạo bị ném cho thú dữ ăn. Ông ta đàn áp cuộc nổi dậy của người Gô-loa. Một hôm, thấy con trai là Titus ngạc nhiên về sắc thuế đánh cả vào nhà vệ sinh, ông đưa cho Titus một đồng tiền mà nói rằng "Con nghĩ xem, đồng tiền có mùi gì đâu !".

Thời ấy có Josephé là nhà viết sử bị Vespasien truy nã. Tục truyền rằng năm 67 công lịch, Vespasien tìm được hang ẩn náu của Josephé và 40 người Do Thái. Vespasien kêu gọi 41 người ra hàng nếu không sẽ tàn sát tất cả. Đa số muốn tự sát, quyết không đầu hàng. Chỉ có hai người nói riêng với Josephé là muốn đầu hàng để sống, vì hoàn cảnh riêng. Josephé thông cảm với hai người đó và đặt ra một "quy tắc" như sau :

Tất cả đứng thành vòng tròn. Người số 1 cầm dao đếm 1, rồi đưa sang người số 2. Người số 2 đếm 2, rồi đưa sang người số 3, để đếm số

3. Ai đếm số 3 thì tự sát ngay. Người thứ 4 cầm dao và bắt đầu lại đếm số 1, người thứ 5 đếm số 2, người thứ 6 đếm số 3 rồi tự sát v.v..., cứ thế mà tiếp tục từ vòng này qua vòng khác (người nào chết rồi hiển nhiên là không đếm được nữa). Cuối cùng còn lại 2 người muốn sống.

Hỏi Josephé phải sắp xếp cho 2 người muốn sống ở vị trí nào ?



Đây là bài toán *không thể đặt thành phương trình được*. Cách giải bài toán này cũng tương tự như cách lập bảng số nguyên tố bằng cách viết ra tất cả các số tự nhiên, rồi "nhặt ra" từng số nguyên tố lần lượt từ nhỏ đến lớn.

Bạn hãy vẽ vòng tròn, đặt vào đó 41 mẫu giấy để tiến hành "phép thử". Trong vòng đầu bạn sẽ thấy các người tự sát mang số 3, 6, 9,..., 36, 39 (bội của 3), người số 40 lấy dao của người 39 (đã chết) đếm 1, rồi đưa cho người số 41 v.v...

Trong vòng hai, các người sau đây tự sát : 1, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32, 37 và 41

Trong vòng ba còn 18 người và có 6 người tự sát mang số 7, 13, 20, 26, 34 và 40

Trong vòng bốn có 4 người chết mang số 8, 17, 29 và 38

Trong vòng năm có 2 người chết mang số 21 và 25

Trong vòng sáu có 2 người chết mang số 2 và 22

Trong vòng bảy có 2 người chết mang số 4 và 35

Cuối cùng 2 người sống sót còn lại là số 16 và 31

Vậy Josephpe phải xếp 2 người muốn sống vào số 16 và 31.

Bachet, một nhà toán học, đã thử tìm công thức tổng quát cho bài toán này, bằng cách lập bảng quan sát trường hợp 4 người, 5 người, đến 1000 người, nhưng đành bó tay !

Bài toán này thuộc loại "bài toán không giải được" hay là "bài toán chưa giải được" ?

Người viết bài này mong các bậc thức giả có "cục u toán học" (bosse mathématique) giải đáp cho.

Hân hạnh lắm thay !

## MỘT CHỨNG MINH TẠO NHIỆM VÀ LỊCH SỬ

Mệnh đề 20 trong cuốn IX của bộ "Nguyên lý" của Œclit là : "Số các số nguyên tố là vô hạn". Kèm theo có phép chứng minh như sau :

Nếu chỉ có một số hữu hạn số nguyên tố  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  thì khi đặt  $P = a_1 a_2 \dots a_k$  ta có  $P + 1 > P$ .

$P + 1$  không thể là số nguyên tố, vì chỉ có  $k$  số nguyên tố. Vậy  $P + 1$  là hợp số, nó phải chia hết cho một số nguyên tố  $a_i$  nào đó. Vì  $a_i$  là ước của  $P$  và  $a_i$  là ước của  $P + 1$  nên  $a_i$  là ước của 1.

Đó là điều vô lí vì  $a_i > 1$ .

Nói cách khác, giả thiết "có một số hữu hạn số nguyên tố" dẫn đến mâu thuẫn, vô lí. Vậy số số nguyên tố là vô hạn.

Phép chứng minh này được các nhà toán học cho là mẫu mực của "sự tao nhã và lịch sự trong toán học".

Nó tao nhã và lịch sự, vì theo họ, nó "giả sử chấp nhận" để rồi "bác bỏ nhẹ nhàng" không làm ai cảm thấy tự ái !

## HẾT NGÀY DÀI, LẠI ĐÊM THAU...

Về vấn đề số nguyên tố, nhân loại đã tốn quá nhiều giấy, mực và tất nhiên là nhiều mồ hôi, chất xám, công sức !

Nhưng chắc là còn lâu mới vén được hết các màn bí mật của số nguyên tố. Vì cứ vén được màn bí mật này, thì lại có một màn bí mật khác trù lên, dày hơn, rộng hơn...

Trong quá trình tìm hiểu số nguyên tố, trong khi chưa tìm được "chìa khóa" nào hữu hiệu hơn, các nhà toán học đã tự bằng lòng với "phương pháp thủ công", tuy thô sơ nhưng chắc chắn, không cần phải tranh cãi lời thôi, như  $2 + 2 = 4$  vậy !

Phương pháp "cao siêu" đó là "sàng Eratosthenes" mà học sinh lớp 6 có học.

Ví dụ : Lập một bảng các số tự nhiên từ 2 đến 100. Gạch đi các bội của 2, của 3, của 5, của 7. Những số còn lại không bị gạch là các số nguyên tố nhỏ hơn 100.

Các bảng tính nhân hai số tự nhiên rất có giá trị trong việc nghiên cứu các số nguyên tố.

Công mày mò làm phép nhân từ ngày này qua ngày khác được ghi lại như sau :

1659 J.H Rahn lập bảng nhân các số mà tích tới 24.000 (nghĩa là  $k.m \leq 24000$  )

1668 John Pell (Anh) mở rộng tới số 100.000

Theo lời kêu gọi của nhà toán học Đức J.H.Lambert, một giáo viên ở Vienne tên là Felkel mở rộng tới số 408.000. Bản này được in năm 1776 do kho bạc Hoàng gia Áo trả tiền phí tổn. Nhưng... bán ế quá, thu lại tiền không đủ vốn, bèn thu lại sách, lấy giấy làm đạn để giết quân xâm lăng Thổ Nhĩ Kỳ !

Đến thế kỉ thứ 19 nhiều nhà tính toán hợp lực làm một bảng toán nhân lên đến số 10.000.000, ấn hành làm 10 tập.

Đặc biệt có nhà toán học J.P Kulik (1773 - 1863) của Đại học Praha, bỏ ra 20 năm trời ròng rã để chơi trò tiêu khiển, nhân các số lên tới 100.000.000 !

Kể ra cũng phải có một hứng thú say mê nào đó mới "hết ngày dài, lại đêm thâu, chúng ta nhân hai số với nhau...".

## BÀI TOÁN SỐ 79 CỦA BẢN RHIND

Bản cổ chữ Rhind (hoặc Ahmés) là một tài liệu toán học cổ từ năm 1650 trước Công nguyên, gồm 85 bài toán chép tay bằng chữ viết của thầy tu. Bản Rhind thực ra là sao chép lại từ một bản thảo trước đó, cổ hơn nhiều.

Bản Rhind được nhà Ai Cập học người Anh tên là A. Henry Rhind mua ở Ai Cập về, hiện để ở Bảo tàng Anh. Bản Rhind được công bố năm 1927, cho ta những thông tin về nền toán học Ai Cập cổ đại.

85 bài toán trong bản Rhind được "giải mã" không khó khăn lắm, song có bài số 79 hơi "kín đáo".

Bài toán đó như sau :

Tài sản	
Nhà	7
Mèo	49
Chuột	343
Ngọn lúa mì	2401
Số đo hekat	16807
	19607

Dễ thấy các số trên là lũy thừa của 7 và tổng của chúng. Lập lại bài toán như thế nào nghe cho có lí ?

Moritz Cantor năm 1907 cho rằng bài toán trên là "ông tổ" của bài toán thời trung cổ do Leonardo Fibonacci nêu ra trong cuốn Liber abaci năm 1202 :

Bài toán của Fibonacci như sau :

Có 7 bà lão trên đường đi Rome. Mỗi bà có 7 con la. Mỗi con la mang 7 cái túi. Mỗi cái túi có 7 cái bánh mì. Mỗi bánh mì kèm theo 7 con dao. Mỗi con dao nằm trong 7 cái vỏ. Số bà lão, con la, túi, bánh mì, dao, vỏ là bao nhiêu ?



Về sau, bài toán này bị "biến dạng" thành một bài "đồng dao" cổ cho trẻ em nước Anh :

Trên đường đến St.Ives

Tôi gặp một người có 7 vợ

Mỗi bà vợ mang 7 cái bị

Mỗi cái bị có 7 con mèo

Mỗi con mèo có 7 mèo con

Có bao nhiêu mèo con, mèo mẹ, bị và vợ ?

Mô phỏng bài đồng dao, so sánh với bài toán 79 của bản Rhind, ta có thể "giải mã" như sau :

Một tài sản có 7 cái nhà, mỗi nhà có 7 con mèo, mỗi con mèo bắt được 7 con chuột, mỗi con chuột ăn 7 ngọn lúa, mỗi ngọn lúa có thể sản xuất ra 7 hekat hạt lúa. Hỏi số nhà, mèo, chuột, ngọn lúa, hekat là bao nhiêu ?

Nếu bài toán số 79 là sự biến dạng của một bài toán cổ hơn nữa, thì "bài toán cổ nhất" như thế nào ?

Nhưng dù biến dạng thế nào, nói gần, nói xa chẳng qua là "lũy thừa của 7 và tổng của chúng". !

## SỐ $\pi$ , LẠI SỐ $\pi$ !

Về số  $\pi$ , người ta nói nhiều quá rồi, tác giả cũng không muốn để bạn đọc gắt lên : "biết rồi, khổ lắm, cứ nói mãi !" !

Nhưng..., tác giả tin rằng chi tiết này không làm bạn đọc dừng đứng :

Trong Literary Digest (tập san văn học !) A.C Orr đã đưa bài thơ sau đây để nhớ số  $\pi$  với 30 chữ số thập phân :

Now I, even I, would celebrate  
In rhymes unapt, the great  
Immortal Syracusan, rivaled, nevermore  
Who in his Wondrous lore,  
Passed on before,

Left men his guidance

How to circles, mensurate.

Xin tạm dịch ra tiếng Việt như sau :

Nay tôi, ngay cả tôi, cũng ca tụng

Bằng những vần thơ vụng về

Vĩ nhân bất tử của thành Syracuse không ai sánh kịp

Với kiến thức phi thường được truyền đạt trước kia

Người đã lưu lại cho người đời cách đo những đường tròn.

Một vài năm sau, trên tạp san Scientific American xuất hiện câu :  
"See, I have a thyme assisting my feeble brain, its tasks off times  
resisting"

Tạm dịch là :

"Xem đây, tôi có một cây bạch lý hương hỗ trợ khối óc kém cỏi  
của tôi, khi nó không chịu chu toàn công việc những khi rảnh rỗi."

Còn hai cách nhớ khác khá vui nhộn là :

"How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures  
involving quantum mechanics"

Tạm dịch là : "Sao tôi thèm uống một cái gì, dĩ nhiên là thứ  
mạnh, sau những buổi thuyết giảng nặng nề liên quan đến cơ học lượng  
tử".

Và câu :

"May I have a large container of coffee ?"

Xin vui lòng cho tôi một bình cà phê lớn.

## BỆNH "CẦU PHƯƠNG HÌNH TRÒN"

Bài toán cầu phương hình tròn (tức là dùng compas và thước dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn cho trước) xuất hiện ở Ai Cập từ 2000 năm trước Công nguyên. Số người lao vào giải quyết bài toán vô nghiệm này nhiều không đếm xiết, với một quyết tâm rất cao, đến nỗi phát sinh "bệnh dịch cầu phương hình tròn". Tất nhiên đó chỉ là "công dã tràng".

Bài toán "cầu phương hình tròn" về thực chất là khẳng định hay bác bỏ tính siêu việt của số  $\pi$ . Xung quanh vấn đề này có nhiều giai thoại lí thú :

Năm 1892 trên tờ báo New York Tribune có người công bố rằng đã tìm được giá trị xác thực của  $\pi$  là 3, 2 !

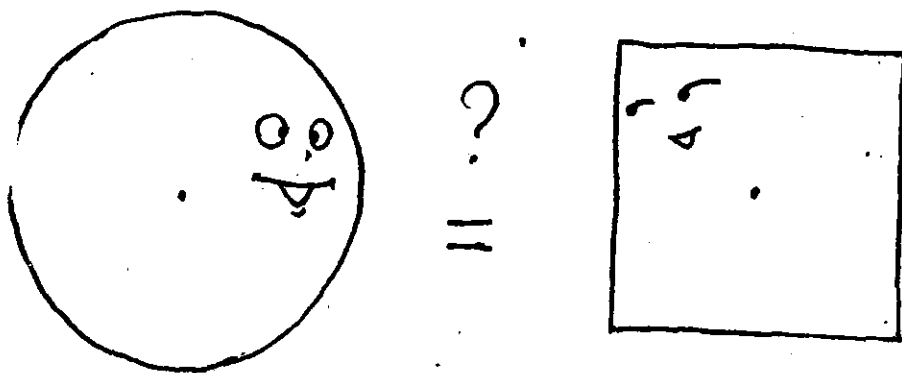
Bài báo này đã gây ra nhiều cuộc cãi vã ồn ào.

Chưa hết, từ năm 1934 tòa báo còn nhận nhiều "công trình toán học về số  $\pi$ , trong đó có "luận án khoa học" chứng minh rằng

$$\pi = 3 \frac{13}{81} !$$

Vẫn chưa hết, dự thảo luật số 246 của Nghị viện bang Indiana năm 1897 có "điều khoản quy định giá trị số  $\pi$ ".

"Thấy rằng diện tích một hình tròn bằng diện tích một hình vuông có cạnh bằng  $\frac{1}{4}$  chu vi hình tròn, cũng như diện tích một hình chữ nhật có cạnh bằng nhau thì bằng diện tích một hình vuông dựng trên cạnh bằng nhau đó..."



Dự thảo này đã được Nghị viện thông qua, nhưng báo chí hồi đó chế diễu nhiều quá, nên Thượng viện giữ lại để chờ các vị "tai to mặt lớn" của Hội đồng Giáo dục Bang cho phán quyết cuối cùng...

(Cũng nên nhắc lại rằng Lindemann, năm 1882 đã chứng minh được  $\pi$  không phải là số đại số).

### HẬU SINH "KHẢ ÁI"

Cuối thế kỉ thứ 3 sau Công nguyên (sau Apollonius gần 500 năm) nhà toán học Pappur của Alexandria đã cho ra đời "Tuyển tập toán học" gồm 8 quyển.

Quyển VII có cách giải cho bài toán : Vẽ nội tiếp một đường tròn cho trước một tam giác mà các cạnh của nó, kéo dài nếu cần, sẽ đi qua ba điểm thẳng hàng cho trước.

Bài toán này gọi là bài toán Castillon Cramer, vì ở thế kỉ 18, bài toán đã được Cramer khái quát hóa cho trường hợp ba điểm đó không

nhất thiết phải là thẳng hàng. Chính Castillon đã công bố cách giải cho bài toán khái quát hóa đó, và công bố công trình trong năm 1776.

Lagrange, Oler và vài nhà toán học cỡ lớn khác cũng công bố cách giải của mình trong năm 1780.

Nhưng xuất sắc nhất là nhà "toán học mười sáu tuổi" người Italia tên là Giordano đã công bố kết quả "bài toán khái quát của bài toán khái quát Castillon" cho trường hợp "nội tiếp trong một đường tròn hình  $n$  cạnh, có các cạnh đi qua  $n$  điểm cho trước".

Lời bình của các nhà toán học đương thời cho là "lời giải rất đẹp".

Đúng là "hậu sinh khả úy" và "hậu sinh khả ái" nữa, vì cái "đẹp" thì ai cũng yêu !.

## HERMES VÀ ĐA GIÁC ĐỀU 65 537 CẠNH

Giáo sư Hermes ở Linge đã bỏ ra 10 năm trời để nghiên ngầm bài toán dựng một đa giác đều có 65 537 cạnh.

Tác giả tự hỏi : Không biết ông ta có dùng thước và compa để dựng hình thực sự không ?

Nếu có thì tác giả xin "chào thua", và xem ông như một kì quan thế giới, đề nghị đưa tên ông vào cuốn kỉ lục Guinness !

Vì thưa các bạn, tác giả tự xét không đủ kiên nhẫn và tính cẩn thận để vẽ một đa giác đều có quá 24 cạnh !.

## KHOÍ DA DIỆN ĐỀU : MỘT MÀN HUYỀN BÍ ?

Cái gì hiếm cũng quý. Trong khi có vô số khối đa diện, thì chỉ có năm khối đa diện đều. Có nhà Toán học thời xưa cho rằng đó là "những món quà độc đáo của Thượng đế tặng con Người"

Khối đa diện đều được Œclit nói đến trong Quyển XIII của bộ sách Nguyên lý.

Khối đa diện đều từ trước thời Œclit đã được nói đến, và được gọi là "Khối Platon".

Nhưng theo Œclit thì "gọi như thế là không đúng vì ba trong các khối đó là khối tứ diện đều, khối lập phương, và khối thập nhị diện đều là thuộc về các môn sinh của Pythagore, và khối bát diện đều, nhị thập diện đều là thuộc về Theaetetus". Các ý kiến này đúng hay sai, hiện nay không ai xác minh, vì chân lí đã rơi vào cõi mộng lung của thời gian...

Có điều chắc chắn là chính Platon trong cuốn Timaeus đã chỉ ra cách dựng năm khối đa diện đều. Trong cuốn này đã có nói đến sự liên hệ có tính huyền bí giữa bốn khối tứ diện, bát diện, nhị thập diện, lập phương với bốn yếu tố cơ bản của vật chất là lửa, không khí, nước và đất. Khối thập nhị diện đều không hiểu sao lại được liên hệ một cách mơ hồ với vũ trụ !

Thời Trung cổ Képler (1571 - 1630) lại nói đến các khối đa diện đều, và liên hệ chúng với tính huyền bí của vũ trụ, theo cách giải thích rất được sùng bái thời đó :

Lửa là cái khô nhất nên biểu thị cho tứ diện (ít mặt nhất)

Nước là cái ướt nhất nên biểu thị cho khối 20 mặt (nhiều mặt nhất)

Đất biểu thị cho khối lập phương, vì khối này có mỗi mặt là hình vuông nên đứng vững vàng trên mặt đất nhất.

Không khí biểu thị cho khối 8 mặt, vì khi cầm nó tại các đỉnh đối diện, nó có thể xoay một cách uyển chuyển như không khí vậy.

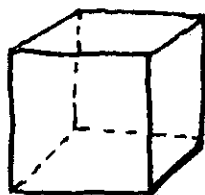
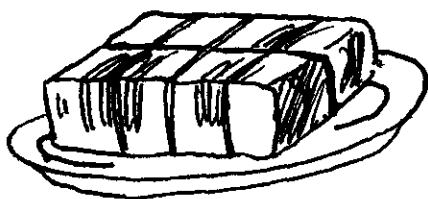
Vũ trụ biểu thị cho khối 12 mặt vì hoàng đạo có 12 dấu.

Như vậy Képler cũng nhất trí hoàn toàn với Platon về ý nghĩa của các khối đa diện đều, và giải thích nghe có lí hơn.

Sau này ta thấy khối tứ diện, lập phương, 8 mặt là hình dạng các tinh thể natri, muối ăn, phèn xanh...

Người ta còn quan sát thấy khối 12 mặt, 20 mặt là hình dạng bộ xương của một loại vi động vật ở biển, có tên là "trùng mặt trời Radiolaria"

Năm 1885 ở Monte Loffa gần Padua người ta khai quật được một đồ chơi hình 12 mặt đều, được xác định là có từ 500 năm trước Công nguyên.



Bàn về khối đa diện đều tác giả liên tưởng đến chuyện "bánh chưng bánh dày" của ta. Tổ tiên ta quan niệm "Trời tròn, Đất vuông". Chiếc bánh chưng hình hộp chữ nhật tượng trưng cho Đất, có liên quan gì đến hình lập phương (cũng tượng trưng cho Đất) của thời Oclic?

Người ta thường nói "những bộ óc lớn gặp nhau" (Les grands esprits se rencontrent). Không biết trường hợp này có đúng không.

## LÔBASEPXKI - CON NGƯỜI TỪ BỎ ĐƯỜNG MÒN

(IVANOVICH LÔBASEPXKI 1792 - 1856)

Lôbasepxki là nhà toán học Nga sinh năm 1792 tại Nôvôgorôt trong một gia đình công chức nhỏ.

Tên tuổi của Lôbasepxki gắn liền với môn Hình học - Hình học Lôbasepxki

Từ thuở còn là học sinh phổ thông, khi bắt đầu học hình học, không ai không biết mệnh đề : "Qua một điểm ngoài một đường thẳng, ta chỉ có thể vẽ được một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho".

Mệnh đề này gọi là "Tiên đề Ôclit", hiển nhiên đến nỗi không một ai thắc mắc gì từ mấy ngàn năm nay về tính đúng đắn duy nhất của nó.

Trong lịch sử đã có nhiều người cố gắng chứng minh mệnh đề này nhưng đều đi đến thất bại.

Vậy thì phải chăng có thể thay tiên đề Ôclit bằng một mệnh đề khác ?

Chính Lôbasepxki là người đầu tiên đặt vấn đề xây dựng hình học trên cơ sở bác bỏ tiên đề Ôclit, thay nó bằng tiên đề : "Qua một điểm ngoài một đường thẳng có hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho"

Trên cơ sở tiên đề này Ông xây dựng một môn hình học mà đối với con mắt thông thường, các thể hiện của nó vô cùng kì dị, khó mà chấp nhận được (Ví dụ : "Tổng các góc của tam giác bé hơn  $180^\circ$ ")

Ngày công bố "Hình học Lobasepxki" là ngày 23 tháng 2 năm 1826, nhưng mãi đến năm 1829 công trình mới được xuất bản.

Cái mới, cái khác thường, dù đúng đắn đến mấy, cũng vấp phải sự chống đối của cái cũ, của nếp suy nghĩ theo đường mòn. Lobasepxki bị mỉa mai, khích bác, nhưng ông vững tin vào chân lí.

Ông nói : "Không, môn hình học này không sai. Mặc dù nó phức tạp hơn hình học Ơclit nhưng nó rộng hơn hình học Ơclit rất nhiều : Hình học Ơclit chỉ là một trường hợp riêng, trường hợp giới hạn của môn hình học mới này"

Về vấn đề này cần nêu ra thiếu sót của nhà toán học Gauxơ. Gauxơ đã đánh giá đúng mức công trình đặc sắc của Lobasepxki, nhưng do sợ "những con ong bò vẽ bao vây đầu tôi nếu tôi công bố ý kiến của tôi" nên Gauxơ đã im hơi lặng tiếng, không mạnh dạn bảo vệ chân lí.

Những năm cuối đời Lobasepxki bị mù. Ông đọc cho học trò viết lại cuốn sách "Hình học tổng quát" bằng tiếng Pháp.

Ông từ giã cõi đời ngày 12-2-1856.

Ngày nay "Hình học Lobasepxki" có nhiều ứng dụng trong vật lí vũ trụ, được xem là một bước ngoặt cách mạng trong tư duy khoa học của con người.

## IANÔT BÓLIAI - MỘT THIÊN TÀI BỊ LÃNG QUÊN

Nói đến hình học phi Ơclit, là người ta nghĩ ngay đến Lobasepxki, nhà toán học Nga vĩ đại.

(Lôbasepxki là nhà toán học đầu tiên đã bác bỏ tiên đề Ôclit, chủ trương tiên đề : "Qua một điểm ngoài một đường thẳng đã cho, có hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho")

Nhưng ít ai biết đến một thiên tài khác cũng có một công trình tương tự như Lobasepxki về đường song song. Đó là Ianốt Bôliai người Hungari, con của nhà toán học Phacát Bôliai, bạn của Gauxơ. Chính Phacát cũng đã bỏ khá nhiều thời gian, sức lực tìm cách chứng minh tiên đề Ôclit, nhưng không đi đến đâu. Biết con mình cũng đang ra sức "nổi nghiệp cha" trong vấn đề này, ông rất buồn rầu khuyên : "Con hãy vất bỏ ngay ý nghĩ điên rồ đó đi. Nó sẽ ngốn hết sức lực thời gian và mọi nguồn vui của con. Đó là cái "vực thẳm" đen tối có thể nuốt chửng hàng nghìn nhân vật lỗi lạc như Niutơn. Trên Trái đất này điều đó không bao giờ lộ một tia sáng nào vui vẻ cả" (Thư gửi cho con - 1820)

Ianốt Bôliai vào quân đội nhưng cái "tiên đề song song" quái quỷ kia vẫn ám ảnh ông, và ông cũng đã đạt được một số kết quả trong việc xây dựng một môn hình học mới trên cơ sở bác bỏ tiên đề Ôclit, công nhận tiên đề về đường song song theo nội dung của tiên đề Lôbasepxki.

Năm 1832, nhân việc xuất bản một cuốn sách của cha, Ianốt Bôliai đã kèm một phụ lục về nghiên cứu của mình vào cuối sách đó.

Phacát Bôliai gửi thư cho Gauxơ, đề nghị ông cho biết ý kiến về công trình của con. Nhưng Gauxơ (cũng là người từng nghiên cứu vấn đề này) tỏ ra dè dặt, không dám công khai ủng hộ Ianốt, vì sợ công kích, sợ bị mất uy tín, tuy trong thâm tâm ông vẫn cho Ianốt là đúng đắn về mặt suy luận toán học.

Ianốt chán ngán trước thái độ của Gauxơ. Ông lại càng buồn hơn khi được biết Lobasepxki đã xuất bản cuốn sách, trong đó có những vấn đề mà Ianốt đã phát hiện ra, nhưng không ai để ý đến ...

## PASCAL, MỘT CUỘC ĐỜI ĐẦY KỊCH TÍNH

Ông người Pháp, sinh năm 1623.

Năm 12 tuổi đã tự học toàn bộ hình sơ cấp với sự hiểu biết sâu sắc và cảm hứng đặc biệt.

Năm 14 tuổi đã tham gia hội thảo toán học với các "bậc đàn cha".

Sự nghiệp toán học bị ngắt quãng nhiều lần vì Chúa không hài lòng thấy ông do toán mà khô đạo. "Lời nhắn của Chúa được biểu hiện qua câu chuyện : Một ngày kia, chiếc xe ngựa của Ông lỏng lẻo, lao tới cái chắn cầu Neuilly.... Trong giây phút mà cái chết đã cầm chắc trong tay thì tự nhiên, như một phép lạ, các dây cương đứt ra, ngựa dừng lại



bên mép cầu. Ông cảm nhận được lời nhắn của Chúa và tạm biệt toán học, quay về với suy tưởng tôn giáo. Một mảnh da lừa ghi lại tai nạn đó được cài trên ngực áo, như để nhắc nhở ông cần tuân theo ý Chúa...

Nhưng rồi, như một nghiệp chướng, ông lại trở về với toán học, cũng bằng một thông điệp của Chúa : Một hôm răng bị đau nhức, tự nhiên hết đau khi trong đầu xuất hiện một suy nghĩ về một bài toán hình. Ông ngồi liền tám ngày giải các bài toán về đường cycloid, tìm ra các kết quả phong phú của bài toán khó này. Cần nói thêm là đường cycloid, do tính hấp dẫn của nó, đã gây nhiều tranh cãi. Do đó đường cycloid còn có tên là "Helen của hình học", "Quả táo bất hòa".

Nói đến Pascal là nói đến tam giác Pascal về các hệ số của khai triển nhị thức. Tam giác này được nói đến trong cuốn "Luận về tam giác số học" xuất bản năm 1665.

Theo Howard Eves, nhà toán học Mỹ chuyên nghiên cứu lịch sử toán học, thì tam giác Pascal đã được xuất hiện trong một công trình của nhà toán học Trung Quốc tên là Chu Shi Kié từ năm 1303. (Như vậy, phải gọi là tam giác Chu Shi Kié mới đúng lẽ công bằng !)

Pascal được xem là người phát minh ra chiếc xe cút kít một bánh, dùng để chuyên chở hàng hóa trên các đường nhỏ gỗ ghề rất tiện. Pascal còn lấy biệt hiệu là Lovisde Montalte hoặc hoán vị các chữ cái thành Amos Dettonville. Ông mất năm 1662, lúc 39 tuổi.

## KEPLER, NHÀ TOÁN HỌC, THIÊN VĂN HỌC BẤT HẠNH

Képler (1571-1630), người Đức, được biết nhiều như một nhà thiên văn học hơn là một nhà toán học. Nhưng ba định luật Képler

trong thiên văn có quan hệ rất nhiều đến ba đường conic, một "tiêu điểm thú vị" của toán học. Lần đầu tiên, 1800 năm sau khi người Hi Lạp phát triển các tính chất của conic, mới có một ứng dụng thực tiễn đẹp đẽ và hấp dẫn như vậy.

Képler cũng là một trong những người đi đầu trong việc áp dụng phương pháp tích phân để tính thể tích các khối tròn xoay. Trong cuốn "Hình học khối các thùng rượu vang" ông đã dùng "tư tưởng của phép tính tích phân" để tính thể tích 93 khối tròn xoay, do các đường conic quay tạo ra.

Képler kết hợp tài tình cái "cảm giác toán học" có tính huyền bí, với cái thực tiễn cụ thể sinh động, như một cầu thủ tài năng có "cảm giác bóng" chính xác, đồng thời có kĩ thuật xử lí bóng hiệu quả.

Không biết Képler có phải là một điển hình của thuyết "chữ tai liền với chữ tai một vần" không, song cuộc đời riêng của ông quá bi thảm : con chết vì đậu mùa, vợ hóa điên cũng chết, mẹ bị tù tội vì bị cho là ma quỷ ám, bản thân thì nghèo túng, bị trừ dập vì không theo đạo chính thống.

Người ta kể lại rằng, khi vợ chết, ông lấy người vợ thứ hai sau khi phân tích một cách "chính xác toán học" ưu khuyết điểm của 11 cô gái. Nhưng rồi bà vợ thứ hai cũng không hay ho gì, làm cho ông đau khổ hơn.

Ông qua đời năm 1630 trên đường đi lĩnh sổ tiền công chết đói, sau một ngày làm việc cực nhọc. Gia tài để lại : 22 đồng pholorin, 2 chiếc sơ mi rách, 57 quyển Ephemenit, 10 quyển "Các bản Rudônphơ..." Tất nhiên chưa kể đến bao nhiêu phát minh kì diệu về thiên văn và toán mà nhân loại đời đời ghi nhớ.

## FIBÔNAXI VÀ BÀI TOÁN THỎ ĐẸ CON

(FIBONACCI : THẾ KỈ 13)

Năm 1202 nhà toán học Italia Fibônaxi cho xuất bản một cuốn sách tên là "Sách về bàn tính" trong đó có bài toán về thỏ đẻ con như sau :

"Giả sử thỏ đẻ theo quy luật là : một đôi thỏ cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con, một đôi thỏ con sau hai tháng lại sinh một đôi thỏ nữa, rồi sau đó mỗi tháng tiếp tục đẻ ra một đôi thỏ, v.v... và giả sử rằng tất cả các thỏ đều sống."

Hỏi nếu có một đôi thỏ nuôi từ tháng giêng và đẻ con vào tháng hai thì đến cuối năm có bao nhiêu đôi thỏ tất cả ?



Giải bài toán này ta đi đến dãy số :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233

Mỗi số hạng của dãy, từ số hạng thứ ba, là bằng tổng của hai số hạng đứng liền trước nó.

Dãy số như vậy gọi là dãy Fibônaxi.

Dãy Fibônaxi có nhiều tính chất toán học lí thú, và có nhiều mô hình trong thiên nhiên. (quy luật sinh trưởng của cây).

## CUỘC DUA TÀI CỦA FIBÔNAXI

Chúng ta đã biết tên Fibônaxi qua "dãy số Fibônaxi", là dãy 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...  $x, y, x + y, \dots$

Dãy này thường được ghép với bài toán "thỏ đẻ con", "cây trở nhánh". Leonardo Fibônaxi là nhà toán học thiên tài thời Trung cổ (1170 ? - 1250 ?), sinh ở Pisa, một vùng thương mại sầm uất thế kỉ 12, 13. Cha ông là quan chức thuế quan. Có thể vì thế mà ông quan tâm, rồi trở nên thích thú với công việc làm tính, giải các bài toán hóc búa. Năm 1202 Ông cho ra đời một cuốn sách toán nổi tiếng Liber abaci, có 15 chương gồm hầu hết nội dung đại số sơ cấp, từ cách đọc và viết chữ số theo kí hiệu Hindu - Ả-rập, cho đến các phương pháp giải phương trình bậc nhất, bậc hai. Sách còn bao gồm nhiều bài toán đại số độc đáo kiểu như dãy Fibonaxi.

Tài năng của ông được Hoàng đế Frédéric II đánh giá rất cao. Ông được mời về cung để dự một cuộc tranh tài toán học giữa ông và các tùy tùng của Hoàng đế.

John của Palermo, người của Hoàng đế đã ra ba bài toán để Fibônaxi đua tài với đám tùy tùng :

*Bài thứ nhất* : Tìm số hữu tỉ  $x$  sao cho  $x^2 + 5$  và  $x^2 - 5$  đều là bình phương của các số hữu tỉ.

$$\text{Fibônaxi đưa ra đáp số } x = \frac{41}{12}$$

(Đó là đáp số đúng. Các bạn thử lại)

$$\text{Bài thứ hai} : \text{Giải phương trình } x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

Fibônaxi qua bài toán này, chứng minh rằng phương trình không có nghiệm nào biểu diễn được dưới dạng số vô tỉ  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$  (không có nghiệm nào có thể dựng được bằng thước và compa). Ông đưa ra một lời giải gần đúng tới 9 số thập phân. (Đáp số này có ghi trong một công trình của Fibônaxi có tên là Flos, có nghĩa là "bó hoa").

*Bài toán thứ ba* : 3 người có chung một số tiền. Mỗi người rút ra một số tiền không biết bao nhiêu, cho đến lúc chẳng còn gì. Sau đó người thứ nhất trả lại  $\frac{1}{2}$  số tiền đã lấy, người thứ hai trả lại  $\frac{1}{3}$ , người thứ ba trả lại  $\frac{1}{6}$ . Dem số tiền trả lại của 3 người chia đều, rồi đưa lại cho mỗi người. Kiểm lại số tiền của mỗi người thấy : người thứ nhất có  $\frac{1}{2}$  số tiền chung ban đầu, người thứ hai có  $\frac{1}{3}$ , người thứ ba có  $\frac{1}{6}$ . Hỏi số tiền chung ban đầu là bao nhiêu, và lúc đầu mỗi người rút ra bao nhiêu?

Bài toán đưa về việc giải phương trình  $1/s = 47x$ . Một đáp số :  $s = 47$  ;  $x = 7$ , số tiền mỗi người lấy là 33 ; 13 ; 1 (3x là tổng số tiền trả lại).

## GHỊ CÔNG "GỢI Ý"

Trong "Giai thoại toán học - tập một" có ghi lại vụ tranh chấp giữa Tactalia và Cardano về "Phép giải phương trình bậc ba". Ai cũng tự cho là mình là người đầu tiên tìm ra phương pháp giải. Chân lí thuộc về ai, là điều chưa được xác minh, nhưng thế nào cũng có một người "nhận vơ" !

Đối lập với câu chuyện trên, xin nêu ra một hình ảnh về đức tính khiêm tốn tôn trọng sự thật, sẵn sàng và chân thành ca ngợi thành tích của người khác, dù người đó là học trò mình.

Trong cuốn "Các cơ sở của hình học" của Leslie, có thấy trình bày một phương pháp độc đáo về giải phương trình bậc hai

$x^2 - gx + h = 0$  bằng cách dùng hệ trục tọa độ vuông góc Đécác.

Tác giả cuốn sách này có chú thích rõ : "Phép giải được trình bày ở đây về bài toán quan trọng này là do ông Thomas Carlyle, một nhà toán học trẻ trung, nhanh nhẹn, trước đây là học trò của tôi, đã gợi ý cho tôi".

Sir John Leslie là nhà toán học Anh (1766 - 1832), còn Thomas Carlyle là nhà sử học người Ecosse (1795 - 1881), tác giả cuốn "Các anh hùng và sự sùng bái các anh hùng".

Leslie ghi "công gợi ý" của Carlyle một cách công khai, sòng phẳng, há chẳng làm cho những kẻ cướp công người khác suy nghĩ hay sao ?

## TOÁN HỌC VÀ "PHÁI YẾU"

Khi nói đến các nhà toán học nữ tài ba, người ta thường nhắc đến tên tuổi của Kovalenskaja, nhà toán học Nga vào thế kỉ 19.

Rõ ràng các "cục u toán học" (bosse mathématique) ít mọc trên đầu phái nữ. Đó là một sự thật. Điều này đã được các nhà sinh học, tâm lí học, giáo dục học,... giải thích.

Vì số các nhà toán học nữ lỗi lạc ít nên tác giả có lần theo đường dây lịch sử toán học để phát hiện những tài năng toán học nữ bị bỏ quên, chưa được tôn vinh xứng đáng.

May quá, có hai trường hợp có thể giới thiệu với bạn đọc :

Hypatia là con gái của Theon, nhà bình giải toán học Hy Lạp thế kỉ thứ IV sau công nguyên. Bà là một nhà toán học, y học, triết học có tài. Bà có viết những bài bình giải về Arithmetica của Diophantus và "Các thiết diện côníc" của Apollonius. Có thể nói Bà là nhà toán học nữ đầu tiên được nói đến trong lịch sử thế giới.

Tháng 3 năm 415 Bà bị một bọn cuồng tín cơ đốc giáo hãm hại. Cuộc đời đầy kịch tính của Bà đã được dựng lại trong cuốn tiểu thuyết của Charles Kingsley có tên là "Những kẻ thù mới với bộ mặt cũ".

Nhà toán học nữ thứ hai (nếu gọi được như vậy) là Công chúa Elisabeth, con gái vua Frederic V của Bohemia.

Công chúa là người đầu tiên áp dụng hình học Descartes để giải "Bài toán Apollonius" (Đựng đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cho trước)

(Viet, Ôle và Niuton cũng rất chú ý đến bài toán này, nhưng lời giải đẹp nhất thuộc về một sĩ quan pháo binh Pháp tên là Joseph-Diez Gergonne (1771 - 1859)).

## TỪ NHÀ TOÁN HỌC TRỞ THÀNH ĐỨC GIÁO HOÀNG

Gerbert là nhà toán học Pháp (khoảng 950 - 1003) sinh ở Auvergne. Ông theo Cơ đốc giáo, nhưng học ở các trường Hồi giáo ở Tây Ban Nha. Có ý kiến nói rằng chính ông là người đã đem các chữ số Hindu Ả-rập (trừ số 0) về châu Âu.

Trong cuốn Hình học của mình, Gerbert đã giải một bài toán được cho là cực khó lúc bấy giờ :

"Xác định các cạnh của một tam giác vuông cho biết trước cạnh huyền và diện tích".

Gebert còn biểu thị diện tích của tam giác đều cạnh  $a$  là  $\left(\frac{a}{2}\right)\left(a - \frac{a}{7}\right)$  (điều này tương đương với việc lấy  $\sqrt{3} \approx 1,714$  )

Ông thích làm những dụng cụ khoa học bằng tay : bàn tính, địa cầu, mô hình vũ trụ, đồng hồ, đàn ống..., do vậy dân chúng thời đó nghi ngờ ông là "người bán linh hồn cho quỷ dữ".

Mặc cho thiên hạ đồn đại mọi điều chẳng hay, ông vẫn thăng tiến đều trên con đường chức sắc giáo hội.

Năm 999 ông được bầu làm Giáo hoàng. Công việc của giáo hội không làm ông giảm nhiệt tình với toán học.

Kể ra trong lịch sử, đây là trường hợp "độc nhất, vô nhị" từ nhà toán học trở thành Giáo hoàng.

**ƠLE - 48000 TRANG SÁCH TRONG MỘT ĐỜI NGƯỜI**

(LÉONARD EULER 1707 - 1783)

Là tác giả của khoảng 80 bộ sách lớn, mỗi bộ khoảng 600 trang, có lẽ Ơle là một tài năng có một không hai trong đội ngũ các nhà khoa học lỗi lạc của nhân loại cho đến ngày

Ơle viết công trình toán học thoải mái và hào hứng như một nhà văn viết những trang tiểu thuyết trong lúc xúc cảm lên cao...

Trong khoảng 17 năm trời mặc dù bị mù, ông vẫn không ngừng lao động sáng tạo.

Ông sinh ngày 15 tháng 4 năm 1707 tại Balơ (Thụy Sĩ), lúc nhỏ phải học thần học và tiếng Hêbrơ. Becnuli, nhà toán học đã nâng đỡ, khuyến khích Ơle đi vào toán học.

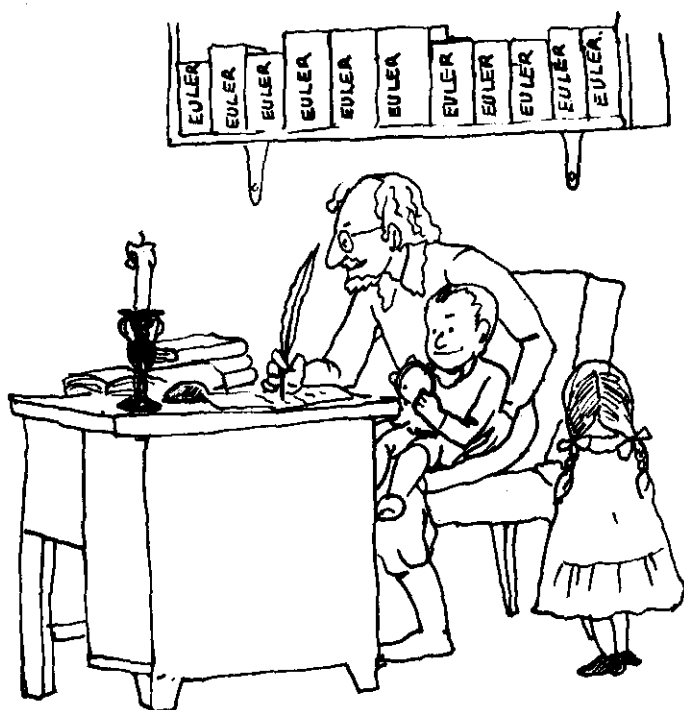
Năm 17 tuổi (1724) ông được phong làm Giáo sư. Năm 19 tuổi bắt đầu có công trình toán học.

Năm 20 tuổi ông đến dạy y (!) ở Xanh Pêtecbuga ở Nga. Tại đây, sau mấy năm ông chuyển qua dạy toán.

Ông có 13 đứa con - 8 đứa mất khi còn nhỏ. Ông thường viết công trình toán với đứa con nhỏ ngồi trên đùi, mấy đứa khác chơi quanh quần bên cha.

Vì mãi mê giải bài toán do Viện Hàn Lâm Pari đặt ra trong ba ngày (trong khi các nhà toán học khác làm ba tháng), ông bị hồng mắt mất phải.

Hoàng hậu Anna mất, ông trở về làm việc ở Viện hàn lâm Beclin. Ngoài toán học ông còn tham gia giải quyết các vấn đề thực tiễn như đúc tiền, làm ống dẫn nước...



Các công trình toán học lớn của ông là nguồn nghiên cứu cho nhiều nhà toán học trẻ khác trong nhiều thế kỉ.

Không ai nghĩ rằng Ole còn là một nhà văn có tài. Ông viết cuốn "Những bức thư gửi cho một Công chúa Đức", trong đó ông trình bày các vấn đề khoa học như cơ học, quang học, dưới "dạng văn học", phù hợp với "món ăn của Công chúa" !

Ông mất ngày 18 tháng 9 năm 1783, thọ 77 tuổi trong lúc còn minh mẫn. Chỉ lúc trái tim ông ngừng đập, ông mới ngừng nghiên cứu, sáng tạo.

## TALET - NGƯỜI ĐẦU TIÊN PHÁT HIỆN RA NHẬT THỰC (TỪ 625 ĐẾN 547 TRƯỚC CÔNG NGUYÊN)

Talet là nhà toán học, thiên văn học cổ Hi Lạp.

Sự thông thái thời đó không phải chỉ biểu hiện ở trình độ khoa học nói chung và toán học nói riêng, mà biểu hiện ở quan điểm triết học.

Talet cho rằng nguồn gốc của mọi vật là nước.

Ngoài toán học ông còn quan tâm đến mọi sinh hoạt của con người, theo con mắt của nhà khoa học : phương pháp đào sông, định phương hướng đi biển...

Ông là người đầu tiên phát hiện ra nhật thực ngày 25 tháng 5 năm 585 trước Công nguyên.

## ÓCLIT : SỐ LẦN TÁI BẢN CHỈ THUA KINH THÁNH (THẾ KỈ THỨ 3 TRƯỚC CÔNG NGUYÊN)

Có thể nói rằng tất cả những người học toán sơ cấp trên hành tinh này đều là học trò của Óclit, nhà toán học lỗi lạc thời cổ Hy Lạp, sống vào thế kỉ thứ 3 trước Công nguyên.

Toàn bộ kiến thức hình học sơ cấp học ở mấy năm đầu ở trường trung học cơ sở hiện nay đều đã được nói đến một cách khá hệ thống, chính xác trong bộ sách "Cơ bản" gồm 13 cuốn do Óclit viết ra. Bộ sách giáo khoa đó hầu như vẫn còn giữ nguyên giá trị sau hơn 2000 năm. Bộ "Cơ bản" của Óclit về số lần tái bản, chỉ thua có Kinh thánh !

Óclit còn nghiên cứu về quang học, âm nhạc thể hiện trong các cuốn "Hiện tượng" và "Thiết diện cônic"

Tục truyền có lần Vua Ptolèmê hỏi Óclit : "Không lẽ ta lại phải đọc đủ cả 13 cuốn trong bộ sách của nhà ngươi sao ? Như mọi vị Vua anh minh khác, ta cần biết hình học là gì, nhưng nhà ngươi hãy nói cho ta, liệu có thể đến với hình học bằng con đường khác ngắn gọn hơn không ?

Ông trả lời ngay : "Tàu Bệ hạ, trong khoa học không có con đường dành riêng cho vua chúa".

## BÀI TOÁN CỔ NHẤT VỀ CẤP SỐ

Khi học về cấp số, thầy giáo nào cũng nói đến bài toán về "phần thưởng cho người phát minh ra ván cờ tướng"

Sự thật có một bài toán cổ hơn rất nhiều về cấp số tìm được trong một cuốn sách nổi tiếng bằng giấy chỉ thảo Ai Cập của Raidơ. Cuốn này tìm được vào cuối thế kỷ 19 và niên đại của nó là 2000 năm trước Công nguyên. Bản này là bản chép tay lại, còn bản gốc chắc là đã xuất hiện vào khoảng 3000 năm trước công nguyên.

Nội dung bài toán có thể diễn đạt như sau :

"Chia một trăm đấu lúa mì cho năm người sao cho người thứ hai nhận được hơn người thứ nhất một số lúa bằng số lúa mà người thứ ba nhận hơn người thứ hai, người thứ tư hơn người thứ ba, và người thứ năm hơn người thứ tư. Thêm vào đó hai người đầu tiên nhận được một số lúa ít hơn 7 lần số lúa của ba người còn lại. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu ?"

Rõ ràng số lúa của mỗi người làm thành một cấp số cộng. Gọi số hạng đầu là  $x$ , công sai là  $y$  ta có

$$\begin{cases} x + (x+y) + (x+2y) + (x+3y) + (x+4y) = 100 \\ 7[x + (x+y)] = (x+2y) + (x+3y) + (x+4y) \end{cases}$$

Sau khi rút gọn có  $x + 2y = 20$  và  $11x = 2y$ .

Giải hệ hai phương trình này suy ra :

$$x = 1\frac{2}{3} ; y = 9\frac{1}{6}$$

Như vậy số lúa của 5 người là

$$1\frac{2}{3} ; 10\frac{5}{6} ; 20 ; 29\frac{1}{6} ; 38\frac{1}{3}$$

Các bạn hãy tưởng tượng : 3000 năm trước Công nguyên đã có bài toán trong chương trình toán lớp 11 hiện nay !

## NÉPER VÀ LÔGARIT

Những người có học toán ở trình độ phổ thông trở lên, đều quá quen thuộc với tên Néper, qua lôgarit Néper (cơ số  $e$ ).

John Néper (1550 – 1617) sinh ra khi cha ông mới 16 tuổi ! Gia đình ông giàu có. Thời "thanh niên sôi nổi" của ông đã bị hút vào cuộc đấu tranh giữa hai thế lực tôn giáo : phái bảo thủ và phái cải cách. Năm 43 tuổi ông có viết một cuốn sách tên là "Một khám phá hoàn toàn về toàn bộ thiên khải của Thánh John", trong đó ông tiên đoán ngày tận thế xảy ra trong khoảng năm 1688 và 1700. Cuốn sách nổi

tiếp đến mức được tái bản 21 lần, và riêng trong thời gian ông còn sống, được tái bản đến lần thứ 10.

Ông không có ý định lấy toán học làm sự nghiệp của đời mình. Việc làm toán, nghiên cứu toán chỉ là công việc làm thêm cho vui lúc đã mệt mỏi vì bút chiến, tranh cãi trên mặt trận tôn giáo, chính trị.

Ông có 4 phát minh về toán, mà vĩ đại nhất là phát minh về lôgarit.

Có nhiều cơ sở để khẳng định rằng công thức

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

đóng vai trò gợi ý rất quan trọng trong phát minh lôgarit của Néper. (Bảng lôgarit lúc đầu chỉ thu hẹp về lôgarit của sin).

Néper đã làm việc ròng rã 12 năm cho lý thuyết lôgarit, và công bố kết quả năm 1614 trong cuốn sách mỏng có tên "Mô tả luật lôgarit kì diệu".

Lôgarit có nghĩa là "số tỉ lệ". Lúc đầu Néper không dùng từ "lôgarit" mà dùng một cụm từ khác có nghĩa là "số nhân tạo".

H. Briggs (1561 – 1631) Giáo sư Toán ở Anh, vì quá khâm phục Néper đã tìm gặp Néper cho kì được. Hai người hợp tác xây dựng lôgarit thập phân, mà ngày nay còn gọi là lôgarit Briggs.

Năm 1624 Briggs công bố bảng lôgarit từ 1 đến 20.000 và từ 90.000 đến 100.000. Khoảng trống ở giữa từ 20.000 đến 90.000 được thực hiện tiếp bởi một người làm công tác xuất bản sách người Hà Lan. Bảng lôgarit của Briggs sống khá dai, gần 400 năm !

Có một chi tiết cần nói đến :

Néper tiếp cận với lôgarit bằng hình học, còn J. Burgi (1552–1632) một người làm đàn người Thụy Sĩ thì tiếp cận với lôgarit bằng đại số. Burgi độc lập nghiên cứu lôgarit đối với Néper, công bố công trình năm 1620, tức là 6 năm sau Néper. Do đó ngày nay công đầu về phát minh lôgarit vẫn thuộc về Néper. Burgi vẫn "âm ứ" vì đã hơi chậm chân, nhưng biết làm sao được ! Chỉ cần cán mức sau nửa vành bánh xe cũng là về sau. Và như vậy là rất công bằng !

Một trong những điều bất thường trong lịch sử toán học là lôgarit đã được khám phá ra trước khi các số mũ được sử dụng.

## SỰ RA ĐỜI CỦA LÔGARIT

Néper người phát minh ra các bảng lôgarit đầu tiên đã nói lí do vì sao mình nghĩ ra phép tính lôgarit :

"Tôi đã cố gắng hết mức để thoát khỏi những khó khăn và sự nhọc nhằn buồn tẻ của việc tính toán mà sự phiền hà của chúng thường làm ảnh hưởng rất nhiều đến việc nắm vững toán học".

Lôgarit đã làm dễ dàng và tăng nhanh tốc độ tính toán rất nhiều cho đến mức Laplace đã viết : "Việc phát minh ra lôgarit làm giảm công việc tính toán từ hàng tháng xuống vài ngày, đã tăng gấp đôi cuộc đời của các nhà thiên văn".

Sự phát minh ra lôgarit đem lại sự ngạc nhiên và thần phục của nhiều nhà khoa học.

Một người cùng thời với Néper là Briggs người mà sau này nổi danh bằng việc phát minh ra lôgarit thập phân, đã viết sau khi nhận được tác phẩm của Néper :

"Bằng các lôgarit kì lạ và mới mẻ của mình, Néper đã buộc tôi phải làm việc rất căng thẳng bằng cả đầu óc và hai tay. Tôi hy vọng sẽ được gặp ông vào mùa hè này, vì chưa bao giờ tôi được đọc một cuốn sách nào lại hấp dẫn và làm cho tôi ngạc nhiên đến thế".

Briggs đã thực hiện ý định của mình và đi Xcôtlen để thăm Néper. Trong buổi gặp gỡ Briggs đã nói :

"Tôi thực hiện một cuộc hành trình dài đến đây chỉ với một mục đích duy nhất là để được gặp Ngài và muốn được biết xem sự sắc sảo và tài nghệ nào đã giúp Ngài ý tưởng đi tới đầu tiên về cuốn sách tuyệt vời cho thiên văn học – Lôgarit. Tuy nhiên bây giờ tôi còn ngạc nhiên hơn nhiều vì đã không có ai tìm ra chúng trước đây – Sau khi đã hiểu biết về chúng thì chúng tỏ ra đơn giản xiết bao !"

Briggs lập ra bảng lôgarit với 14 chữ số (đối với các số từ 1 đến 20.000 và từ 90.000 đến 101.000).

Trong thời kì phát minh ra lôgarit có đến 500 mẫu bảng lôgarit đủ loại

1795 Calle ở Pháp đưa ra bảng lôgarit 20 chữ số.

Sau đây là vài bảng lôgarit tự nhiên khổng lồ mà nay chỉ còn có giá trị lịch sử :

- Bảng 48 chữ số của Volfram đối với các số đến 10.000
- Bảng 61 chữ số của Sarpa
- Bảng 102 chữ số của Parkherot

Và cuối cùng là "siêu bảng lôgarit khổng lồ của Adams" với 260 chữ số !

Bảng cuối cùng này chỉ cho lôgarit của 5 số là : 2, 3, 5, 7 và 10 và thừa số chuyển (260 chữ số) để đưa chúng về lôgarit thập phân.

Ngày nay, với các máy tính hiện đại, giá trị của lôgarit hầu như không còn gì trên thực tế, nhưng nên nhớ cho "sở dĩ ta cao hơn người xưa, vì ta đứng trên vai họ".

## ĐỐI THỦ CỦA LÔGARIT

Ai cũng biết lôgarit là một công cụ giúp việc tính toán được nhanh chóng, làm "tăng tuổi thọ" các nhà toán học, kĩ thuật, thiên văn, đến mức nếu không có nó, thì nhiều lúc trên thực tế các nhà khoa học không thể làm toán được.

Thế nhưng, sự đời có nhiều việc trái khoáy. Sau khi bảng lôgarit ra đời, người ta mới cho in bảng "phần tử các bình phương" cho phép tính tích số  $ab$  dựa vào công thức :

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} \quad (1)$$

Rõ ràng tính năng bảng này yếu hơn hẳn bảng lôgarit. Năm 1856 ở Pháp có xuất bản bảng này với tên gọi dài dòng "Bảng bình phương các số từ 1 đến 1000 triệu mà nhờ nó ta tìm được tích đúng của hai số bằng một phương pháp rất đơn giản tiện lợi hơn là dùng lôgarit, Alecxandơ Côxa lập bảng này"

Điều thú vị là cách tính tích  $ab$  theo công thức (1) đã có từ ba trăm năm trước đây !

Khi đã có bảng lôgarit rồi thì các bảng tính bình phương, lập phương, căn bậc hai, căn bậc ba, nghịch đảo, chu vi đường tròn theo R, diện tích đường tròn theo R v.v... vẫn tồn tại song song, và cũng được bán chạy như tôm tươi, vì khá tiện lợi cho việc tính toán trực tiếp.

Cho hay cái thô sơ và cái hiện đại cùng sống chung hòa bình là một nhu cầu khách quan trong một giai đoạn nhất định.

Sau này, khi có máy tính thì rõ ràng tương quan đã thay đổi đáng kể !

## CÂU CHUYỆN DÃY SỐ VÔ HẠN VÀ NGỊCH LÍ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1}{5} = \dots = \frac{1}{n}$$

Tính chất của các dãy số vô hạn làm cho các nhà toán học trước thế kỉ 20 lúng túng, mất phương hướng như "thợ vụng mất kim".

Nguyên nhân, hay thủ phạm của tình trạng trên là "tính vô hạn" của dãy số.

Ta hãy tạm bằng lòng với định nghĩa : Một tập hợp gọi là vô hạn, nếu ta không bao giờ đếm hết các phần tử của nó. Nói cách khác đếm hết phần tử này, lại có phần tử khác để đếm, không bao giờ quá trình đếm chấm dứt. (Ví dụ dãy số tự nhiên : 0; 1; 2; 3; ... n; n + 1; ...)

Dãy số vô hạn có tổng không ? Là bao nhiêu.

Ví dụ, xét dãy vô hạn : a ; -a ; a ; -a ; ...

$$S = a - a + a - a \dots$$

. Nếu nhóm các số hạng theo kiểu

$$S = (a - a) + (a - a) + (a - a) \dots = 0 + 0 + 0 \dots \text{ thì } S = 0$$

. Nếu nhóm các số hạng theo kiểu

$$S = a + (-a + a) + (-a + a) + \dots \text{ thì } S = a + 0 + 0 \dots = a$$

. Nếu nhóm các số hạng theo kiểu

$$S = a - (a - a + a \dots) = a - S \text{ thì } 2S = a, \text{ suy ra } S = \frac{a}{2}$$

Vậy  $S$  có 3 giá trị là  $0$  ;  $a$  ;  $\frac{a}{2}$  hay sao ?

Áp dụng định nghĩa về sự hội tụ và phân kì của dãy số, ta nói rằng dãy số này không hội tụ mà cũng không phân kì.

Tổng của nó dao động giữa  $0$  và  $a$ . Ta gọi đó là dãy dao động, không có tổng xác định.

Ngay cả  $\text{Leibniz}$ , người cùng với  $\text{Niuton}$  phát minh ra phép tính vi phân, cũng bị lúng túng. Ông ta nói rằng các giới hạn  $0$  và  $a$  đều đồng khả năng, nên giới hạn đúng chắc là giá trị trung bình  $\frac{a}{2}$ .

Cách nhóm các số hạng để có  $S = \frac{a}{2}$  là do một nhà toán học đầu thế kỉ 19 nghĩ ra.

Trong trường hợp  $a = 1$  thì dãy này càng có nhiều tính chất " kì quái".

Ta đã biết

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \dots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^5 \dots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 \dots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = 1 - x + x^5 - x^6 + x^{10} - x^{11} \dots$$

v.v...

Cho  $x = 1$ , tất cả vế phải bằng  $1 - 1 + 1 - 1 \dots$ , các vế trái bằng

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots \text{Vậy suy ra } \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1}{5} !$$

$$\text{NIUTON} = \frac{1}{2} \text{ TỐT HƠN NHIỀU} \dots$$

Tầm vóc vĩ đại của Niuton trong lịch sử tiến hóa của nhân loại là quá hiển nhiên.

Ông là một nhà toán học siêu đẳng, đồng thời cũng là một nhà thực nghiệm bậc thầy. Ông hiểu thấu đáo các vấn đề vật lí và cũng để ra được những công cụ toán học hiệu quả nhất để luận giải chúng.

Lepnits đã không ngần ngại khi phát biểu về Niuton : "Xem xét toán học từ buổi sơ khai trên Trái đất này đến thời điểm hiện diện của Niuton, thì ông đã làm được một phần nửa, mà là một phần nửa tốt hơn nhiều".

Đức Giáo Hoàng đã ca ngợi Niutơn qua các câu thơ :

Bóng tối thật mịt mù

Bao phủ giới tự nhiên

Với bao nhiêu quy luật

Bị che khuất triển miên

Dấng Tồi cao xuất hiện

Cho loài người Niutơn

Và mọi thứ mịt mù

Nay tỏa đầy ánh sáng.

Câu nói nổi tiếng của ông vẫn còn có tác dụng giáo dục đức tính khiêm tốn cho những thế hệ sau : "Nếu tôi có nhìn xa hơn những người khác thì chẳng qua chỉ vì tôi đứng trên vai những người khổng lồ mà thôi".

Tính "đăng tri bác học" của ông cũng được nhắc đến nhiều như những giai thoại xung quanh một thiên tài hiếm có của nhân loại :

Ông mời bạn là bác sĩ Stukely đến dùng một bữa cơm gà. Thế rồi, như sự nhớ một điều gì, ông đội mũ ra đi, bỏ mặc cho khách đói bụng chờ. Cảm lòng không đậu, khách ăn một mình, bỏ xương gà vào đĩa, đẩy lổng bàn lại.

Niutơn trở về, nhìn đĩa xương, suy nghĩ một lát rồi nói : Xin lỗi bạn, chúng ta đã dùng bữa với nhau rồi, mà tôi quên !

Một hôm ông cưỡi ngựa lên đồi. Lên đến đỉnh đồi nhìn lại chỉ thấy cương ngựa, còn ngựa đi đâu mất từ lúc nào mà ông không hay !

## GHIPPA, NGƯỜI BẠN ĐẦU TIÊN CỦA TRĂNG – SAO

Ghippa là nhà toán học – nói cho đúng hơn là nhà thiên văn lỗi lạc – thời xưa, khoảng năm 180 đến 125 trước Công nguyên. Ông sống ở Rôđôx và Alecxăngđria không ai biết tiểu sử của ông.

Khoảng năm 134 trước Công nguyên ông đã lập bản đồ các ngôi sao, để về sau các nhà thiên văn tiên đoán được sự xuất hiện hay biến mất của một ngôi sao nào đó. Trong bản đồ đó có xác định vị trí của hơn 1000 ngôi sao, phân các ngôi sao thành 6 loại tùy theo độ sáng của chúng.



Ngoài ra ông còn đo được độ dài năm Mặt trời, sai không quá 6 phút, khoảng cách từ Quả đất đến Mặt trăng, vẽ quỹ đạo của Mặt trời, Mặt trăng, lập ra lí thuyết về nhật thực, nguyệt thực, xác định thị sai của Mặt trăng bằng cách quan sát thời gian Mặt trăng mọc và lặn. Ông còn đưa ra cách xác định một điểm trên Mặt đất theo tọa độ.

Qua Ghippa người ta biết rằng người Arập đã có công trình vẽ giải phương trình bậc hai từ lâu.

## MOHR HAY MASCHERONI ?

Từ lớp 7 học sinh đã học dựng hình, với quy ước là chỉ được dùng thước và compa.

Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) nhà thơ và nhà hình học Italia thế kỷ 18 đã có một khám phá ngạc nhiên : "Có thể vớt cái thước đi, chỉ dùng compa cũng có thể dựng hình, với quy ước là một đường thẳng xem như dựng được nếu biết hai điểm của nó".

Khám phá này xuất hiện năm 1797 trong cuốn "Geometria del compassi" của Mascheroni.

Về sau người ta thấy rằng không phải Mascheroni là người đầu tiên khám phá ra điều ấy, mà từ năm 1672 Georg Mohr (1640 – 1697) đã nói đến trong cuốn sách của mình, cùng với các chứng minh chặt chẽ.

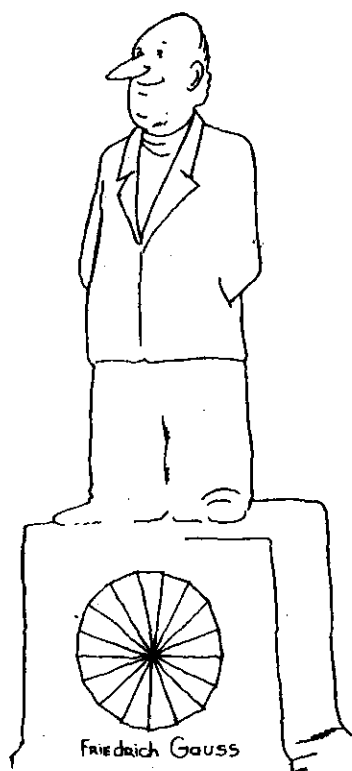
Ai đã phát hiện ra cộng dấu thuộc về Mohr ? Một học trò của nhà toán học Đan Mạch J. Hjelmsler trong một lần "bát phở", ghé qua hiệu sách cũ ở Copenhagen, tình cờ lật mấy trang sách tồn kho từ hơn

trăm hai mươi năm, tìm thấy bản sao của cuốn "Euclides Danicus" do Mohr viết, trong đó có nói đến việc dựng hình "chỉ bằng compa".

Nếu không có chuyện chàng sinh viên tình cờ dạo phố, tình cờ vớ được cuốn sách cũ, thì có lẽ công đầu vẫn thuộc về Mascheroni...

## CÓ PHẢI LÀ Ý NGUYÊN CỦA GAUXƠ ?

Lâu nay người ta vẫn kể câu chuyện sau đây, khi nói về nhà Toán học lỗi lạc người Đức Carl Friedrich Gauxơ :



Gauxơ là người đầu tiên tìm ra được phương pháp dựng đa giác đều 17 cạnh bằng thước và compa, lúc ông 19 tuổi. Chính vì khám phá này, mà Gauxơ có hứng khởi Toán học, quyết tâm lấy Toán học làm sự nghiệp của đời mình.

Để ghi nhớ lại sự kiện đánh dấu bước chuyển hướng của đời mình, ông yêu cầu khắc hình đa giác 17 cạnh đều lên bia mộ của ông.

Nhiều sách cũng nói rằng ý nguyên của ông đã được thực hiện, nghĩa là bia mộ của ông có khắc hình đa giác đều 17 cạnh.

Nhưng xin thưa, theo Howard Eves ở Đại học tổng hợp Maine, tác giả cuốn sách "Nhập môn về lịch sử toán học" xuất bản lần thứ ba năm 1969 thì ý nguyên đó của Gauxơ hoàn toàn không được thực hiện.

Một đa giác đều 17 cạnh chỉ được thấy ở phần cột trụ của tượng đài dành cho Gauxơ ở Brunswick, nơi ông đã sinh ra.

Tác giả cũng không hiểu vì sao một nguyên vọng không lấy gì làm to tát như vậy, của một nhà khoa học lớn của nhân loại, mà không được thực hiện.

Do đó tác giả nghi ngờ về câu chuyện "ý nguyên khắc hình đa giác đều 17 cạnh lên bia mộ" mà sách vở hay nói đến...

(Trong Giai thoại toán học – tập I, tác giả khẳng định bia mộ của Gauxơ có khắc hình đa giác đều 17 cạnh. Nay xin phép nói lại cho đúng).

## DỊNH LÍ XÔPHIA GIECMEN

Lâu nay ta vẫn quen nghĩ, các định lí có mang tên người phát minh, thường là các định lí "cỡ lớn", có tầm quan trọng đặc biệt, có tác dụng lớn trong quá trình phát triển của toán học.

Nói chung, đúng là như vậy.

Nhưng sự suy nghĩ đó không còn đúng nữa khi ta nhắc đến "Định lí Xôphia Giecmien" nhà toán học Pháp (1776 – 1831)

Định lý Xôphia Giecmen như sau :

"Mọi số có dạng  $a^4 + 4$  với  $a \neq 1$ , đều là hợp số".

Phép chứng minh định lý này xin dành cho bạn đọc, nhưng không được dùng quá ba dấu bằng !

(Chú ý là có những định lý mà phép chứng minh rất khó, lại không có tên, được xếp vào loại "định lý vô danh" !)

## PITAGO VÀ NHỮNG CON SỐ LINH THIÊNG

(THẾ KỈ THỨ 6 TRƯỚC CÔNG NGUYÊN)

Pitago sinh vào khoảng 580 trước Công nguyên ở đảo Samôc. Ông đã sống ở Ai Cập, Ấn Độ. Di du lịch khắp nơi để truyền bá "triết học Pitago", mà thực chất là tôn sùng "tính chất thần bí" của các con số.

Tục truyền khi đi qua lò rèn, nghe tiếng búa đập vào sắt có âm thanh cao thấp khác nhau, ông đã tìm ra quy luật của hòa âm, mà theo ông, thực chất là tương quan giữa ba số 6 - 4 - 3.

Pitago tôn thờ các con số, xem mỗi số là một biểu tượng :

Số 1 là lẻ phải; Số lẻ là "số nam", số chẵn là "số nữ"; Số 5 là gia đình vì đó là sự kết hợp giữa nam và nữ; Số 7 là sức khỏe; Số 13 là điểm xấu; Số 17 bị Pitago ghét cay đắng vì "17 nằm giữa 16 là số chính phương ( $4^2$ ) và 18 là tổng của hai chính phương. ( $3^2 + 3^2$ ). Mà  $9 \times 4 = 2(9 + 4)$  tức 9 và 4 là cạnh của hình chữ nhật có chu vi bằng diện tích.."

Do tôn sùng con số, cho con số là "nguồn gốc của mọi nguồn gốc" nên Pitago tìm mọi khía cạnh đặc biệt thể hiện trong mối liên hệ giữa chúng :

"Số hoàn chỉnh" là số bằng tổng các ước số của chúng (như  $6 = 1 + 2 + 3$ ). Số hoàn chỉnh lớn nhất ngày nay tìm được là  $2^{2280}(2^{2281} - 1)$

"Hai số bạn bè" là hai số mà mỗi số bằng tổng các ước số của số kia (ví dụ 220 và 284)

Nói đến Pitago ai cũng nhớ đến "định lí Pitago" quen thuộc.

Định lí Pitago hiển nhiên, rõ ràng, dễ hiểu đọc đáo cho đến mức có người đề nghị lấy định lí này làm tín hiệu liên hệ với "sinh vật cao cấp" nếu có trên các hành tinh.

Họ lí luận rằng : "Nếu ở đâu có sinh vật cao cấp thì ở đó ắt có định lí Pitago !"

Biểu tượng của trường phái Pitago là hình ngôi sao năm cánh. Ngôi sao này là tín hiệu tìm nhau của người cùng hội Pitago"

Ông mất khoảng năm 500 trước công nguyên.

## 666 = KÈ THÙ CỦA CHÚA = LEO X

Stifel được đánh giá là nhà Đại số học người Đức vĩ đại nhất của thế kỉ 16. Ông là tác giả cuốn Arithmetica integra (Toàn bộ số học). Có một điểm đặc biệt cần chú ý trong cuốn này là sự kiện kết hợp cấp số cộng với cấp số nhân, báo trước sự ra đời của logarit 100 năm sau.

Stifel nổi tiếng về toán một phần thì nổi tiếng về "bói toán dự đoán" mười phần ! Không phải cái thứ bói toán của các thầy "lóc cóc từ" làm cảm, mà đây là thứ bói toán dựa trên "khoa học về số", "nói có sách, mách có chứng".

Ông vốn là một thầy tu, tham gia cải cách tôn giáo một cách hăng say, đến độ cuồng tín, dưới sự hướng dẫn của nhà cải cách Martin Luther. Ông chuyên nghiên cứu về sự huyền bí của các con số, và tự xem là người được Thượng đế ban cho một khả năng đặc biệt, thông qua các con số, để đoán hậu vận nhân loại...

Không biết dựa vào tài liệu nào trong Kinh Thánh mà ông đoán là ngày tận thế là ngày 3 tháng 10 năm 1533. Vì lời dự đoán như đinh đóng cột của ông mà thiên hạ vong gia bại sản khá nhiều, rủ nhau bỏ hết công việc của cải, theo ông về nước Chúa ! Kết quả của cuộc đoán mò vĩ đại này là án "cưỡng bức lưu đày" dành cho nhà toán học Stifel.

Chưa hết, ông còn dùng số học để chứng minh rằng Leo X là "kẻ thù của chúa" đã được nói đến trong Kinh Thánh ("Hãy để cho nó biết đếm số kẻ thù của Chúa, bởi đó là số của một con người; và số của nó là sáu trăm và ba lần hai mươi và sáu")

Ông "chứng minh" như sau :

Từ LEO DECIMVS, ông rút ra các kí hiệu của chữ số La Mã L, D, C, I, M, V. Ông thêm vào kí hiệu X là số 10, vì LEO DECIMVS có 10 chữ cái. Bỏ đi chữ cái M vì chữ M đại diện cho từ Mystérium, có nghĩa là huyền bí. Sắp xếp lại các chữ (sau khi bỏ M, thêm X) ta có DCLXVI bằng 666, đúng là số "kẻ thù của Chúa" !

"Phép chứng minh", theo ông, là kết quả của sự truyền cảm từ Chúa, làm cho ông sáng mắt sáng lòng, nhìn thấy những bí ẩn của con số.

Một thời gian sau Cha Bongus theo dòng Jesuit lại "chứng minh" rằng số 666 chính là số của nhà cải cách tôn giáo Martin Luther (tức chứng minh Martin Luther là "kẻ thù của Chúa")

Phép chứng minh của Bongus như sau :

Thứ tự chữ cái từ A đến I biểu thị cho các số từ 1 đến 9, từ K đến S biểu thị 10 đến 90 (hàng chục), và từ T đến Z biểu thị 100 đến 500 (hàng trăm). Do đó

M	A	R	T	I	N	L	V	T	E	R	A
30	1	80	100	9	40	20	200	100	5	80	1

Tổng các số là 666

(Chữ cái La tinh giống chữ cái tiếng Anh, nhưng không có j và w. Trong chữ cái lớn U được viết là V)

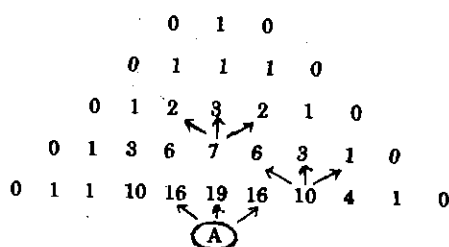
Về sau này có người còn chứng minh được 666 biểu thị cho Hitler.

## TAM GIÁC ĐIỀU HÒA LEPNITX

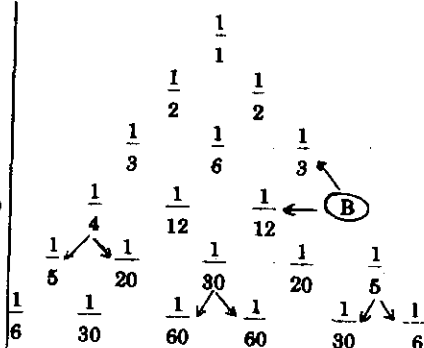
Chúng ta đã quen với tam giác Pascal. Sau đây xin giới thiệu một tam giác độc đáo mà ít người biết tới : đó là tam giác điều hòa Lepnitx.

Một số tính chất của nó "tương tự theo nghĩa ngược lại" với các tính chất của tam giác Pascal. Tam giác Pascal có đối tượng là số nguyên, còn tam giác điều hòa Lepnitx có đối tượng là các số nghịch đảo của chúng

Sau đây ta trình bày hai tam giác để so sánh cách thành lập chúng, và rút ra vài kết luận lí thú.



Tam giác Pascal



Tam giác điều hòa Lepnitsx

Trong tam giác Pascal, mỗi số (trừ số ở biên) bằng tổng các số "tây bắc - bắc - đông bắc". Ví dụ  $7 = 2 + 3 + 2$ ;  $10 = 6 + 3 + 1$  v.v...

Trong tam giác điều hòa Lepnitsx, mỗi số (trừ số ở biên) bằng tổng các số "tây nam - đông nam" của nó. Ví dụ

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}; \quad \frac{1}{30} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60}; \quad \frac{1}{5} = \frac{1}{30} + \frac{1}{6}$$

Do cách thành lập bảng Pascal và bảng Lepnitsx, muốn điền vào một ô trống, đối với bảng Pascal ta làm phép cộng (ví dụ (A) =  $16 + 19 + 16 = 51$ ), đối với bảng Lepnitsx ta làm phép trừ (Ví dụ (B) =  $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ )

## BÀI TOÁN GÔN BẮC VẤN CÒN THIẾU ĐÓ

Gôn Bắc (1690 - 1764) là nhà toán học mà tên tuổi gắn liền với một vấn đề toán học lí thú có tên là "bài toán Gôn Bắc".

Trong một tác phẩm khoa học viết chung với Ô le, Gôn bác đưa ra giả thiết : Mọi số nguyên  $n \geq 6$  đều có thể viết dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố. Trong một bức thư (30 - 6 - 1742) Ô le nói rằng muốn chứng minh điều đó, phải chứng minh rằng mọi số chẵn đều viết được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố.

Bài toán Gôn bác (có khi gọi là Gôn bác - Ô le) có thể diễn ra là :  
 "Mọi số nguyên  $n > 4$  đều là tổng của hai số nguyên tố. Mọi số nguyên lẻ  $n > 27$  đều là tổng của 3 số nguyên tố.

Kinh nghiệm cho biết rằng điều đó là đúng, nhưng chưa ai chứng minh được.

- Sorenman đã bước một bước đầu quan trọng trong việc chứng minh, và có thu được một kết quả chưa toàn diện.

Năm 1937 Vinogradov - nhà toán học Nga - đã chứng minh rằng : Mọi số lẻ đủ lớn có thể phân tích thành tổng của 3 số nguyên tố; Và mọi số chẵn có thể phân tích thành tổng của không quá 4 số nguyên tố.

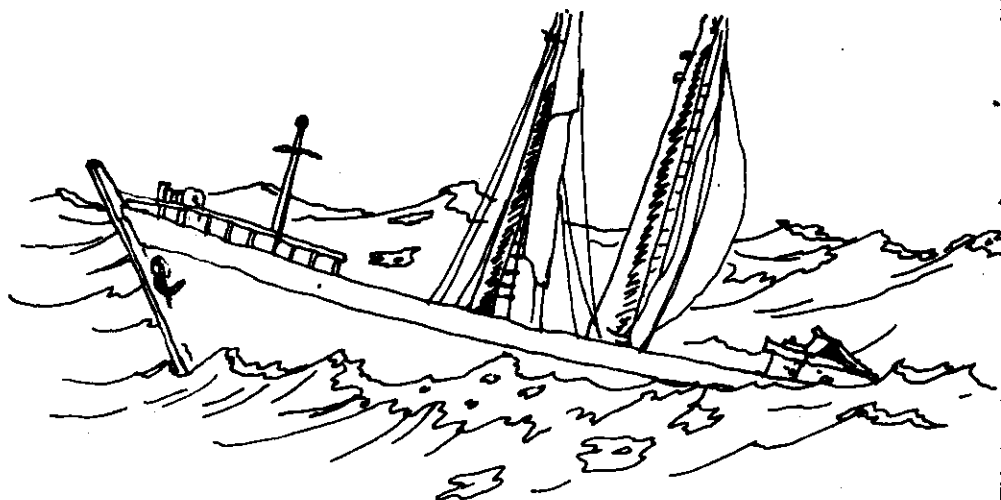
Bài toán của Gôn bác - Ô le vẫn còn đó.

Cần nói thêm : Gôn bác tốt nghiệp Đại học luật và là một luật sư trước khi đi vào toán học.

## 15 TÊN CƯỚP CHẾT VÌ SỐ 9

Có một chiếc tàu chở 30 người, trong đó có 15 tên cướp và 15 người lương thiện. Tàu đang lênh đênh trên biển thì gió bão khủng khiếp nổi lên. Thuyền trưởng cho biết tàu chỉ chở được có 15 người, nếu quá số đó tàu sẽ chìm, không ai còn sống. 15 tên cướp muốn quăng 15 người lương thiện xuống biển. Nhưng thuyền trưởng đề nghị mọi

người thỏa thuận "luật chơi" sau đây, trong giờ phút mà lưỡi hái của tử thần đã kề cổ :



Hãy ngồi thành một vòng tròn, lần lượt từng người đếm từ 1 đến 9, ai đếm số 9 thì tự giác nhảy xuống biển. Hết số 9 lại bắt đầu đếm từ 1, đến số 9 lại nhảy xuống biển. Cứ thế cho đến khi còn đúng 15 người trên tàu.

Bạn hãy vẽ vòng tròn, trên đó xếp 30 mẫu giấy đánh số từ 1 đến 30 thay cho 30 người.

Bạn sẽ thấy, những người mang số sau đây lần lượt nhảy xuống biển :

Vòng thứ nhất : 9, 18 và 27

Vòng thứ hai : 6, 16 và 26

Vòng thứ ba : 7 và 19

Vòng thứ tư : 30, 12 và 24.

Vòng thứ năm : 8 và 22

Vòng thứ sáu : 5 và 23

Vậy thuyền trưởng phải sắp 15 người lương thiện (kể cả ông)

vào các số : 1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28 và 29

Bachet đã đưa câu thơ sau đây để nhớ các "số chìa khóa"

Mort, tu ne failliras pas

En me livrant en trépas

(Tạm dịch là : Thẩn chết ! Người không làm nổi việc đẩy ta vào cõi chết !)

Bachet quy ước : các nguyên âm a, e, i, o, u (theo thứ tự trong bảng chữ cái) thay cho các số 1, 2, 3, 4, 5.

Hai câu thơ trên, xét từng chữ, rút các nguyên âm ra sẽ có o, u, e, a, i, a, a, e, e, i, a, e, e, a ứng với 4, 5, 2, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 1. Các số đó báo ta "Sắp 4 người lương thiện, tiếp đến 5 tên cướp, tiếp đến 2 người lương thiện, tiếp đến 1 tên cướp. vv..."

Nhớ là phải xếp 4 người lương thiện trước nhé, đừng nhầm xếp 4 tên cướp trước thì thuyền trưởng cũng xuống thủy cung làm rề vua Thủy tề !

**AMEN = 99**

Thời cổ đại, các chữ cái được dùng để biểu thị các chữ số. Do đó xuất hiện một cách rất tự nhiên một khoa học thần bí gọi là Gematria,

tức là số học mô tả. Gematria rất thịnh hành ở cộng đồng người Do thái cổ (Hêbrơ), và sau đó đã hồi sinh trong thời Trung cổ.

Từ "amen", viết theo tiếng Hilạp, rồi diễn dịch qua số học mô tả, sẽ cho số 99. Do đó trong một số bản thảo Cơ đốc giáo, con số 99 xuất hiện ở cuối mỗi lời cầu kinh.

Bằng số học mô tả, có người "chứng minh rằng" trong ba người : Roosevelt, Churchill, Staline, thì Roosevelt là vĩ đại hơn cả !

Nhiều nhân vật nổi tiếng như Louis XIV, đức giáo hoàng Sylvester II, Gladstone (4 lần Thủ tướng Anh) v.v..., được số học mô tả "chứng minh" là "Kẻ thù của chúa", tức là tên của họ mang số 666.

De Morgan có viết trong cuốn "Kho tàng nghịch lý" một vài mẫu chuyện minh họa cái mốt áp dụng Gematria :

1. Một ông James Dunlop nào đó bắn xà vào một người theo Gia tô giáo bằng khẩu súng 666. Khi đó Tiến sĩ Chalmers bình tĩnh nói rằng "Sao, Dunlop, chính anh phải chịu điều đó" và đưa cho Dunlop tờ giấy chứng minh rằng chính tên Dunlop bằng 666 !

2. Ngài Davis Thom thấy một quý ông trẻ tuổi tên Saint Claire đang loay hoay với số 666, liền chỉ cho ông Claire thấy rằng chính tên Saint Claire là 666. (Kẻ thù của Chúa) !

## BACHET LÀM ÁO THUẬT VỚI 21 LÁ BÀI

Bộ bài "tu lơ khơ" có 52 lá. Chọn bất kì 21 lá. Xếp 21 lá thành 3 hàng. Bạn cho tôi biết lá bài mà bạn để ý (gọi là lá chọn) nằm ở hàng nào. (Tên lá chọn bạn ghi bí mật vào tờ giấy úp xuống bàn trước mặt

tôi, để sau này bạn khỏi chơi phản phé !). Tôi xếp lại 3 hàng theo cách khác, bạn cho tôi biết lá chọn ở hàng nào. Tôi sẽ nói trúng phóc lá chọn.

Giả thử 21 lá bài được đánh số từ 1 đến 21 và đầu tiên tôi xếp thành 3 hàng :

Hàng I :	1	2	3	4	5	6	7
Hàng II :	8	9	10	11	12	13	14
Hàng III :	15	16	17	18	19	20	21

Giả sử lá bài số 10 là lá chọn và cho tôi biết lá bài đó nằm ở hàng giữa. Tôi sắp lại bài thành một chồng có 3 xấp, xấp thứ nhất từ 1 đến 7, xấp thứ hai từ 8 đến 14, xấp thứ ba từ 15 đến 21. Bao giờ tôi cũng cố tình để lá chọn vào xấp thứ hai. (Ví dụ bạn chọn lá bài số 5 thì tôi sẽ xấp 1 - 7 vào xấp thứ hai)

Sau đó tôi chia thành 3 hàng mới theo kiểu

Hàng I	1	4	7	10	13	16	19
Hàng II	2	5	8	11	14	17	20
Hàng III	3	6	9	12	15	18	21

Bây giờ bạn cho tôi biết lá chọn ở hàng I (lá số 10). Tôi sắp lại thành 3 xấp :

Xấp thứ nhất gồm các lá bài ở hàng II, xấp thứ hai gồm các lá bài ở hàng I, xấp thứ ba gồm các lá bài ở hàng III (bao giờ cũng để lá bài chọn ở xấp giữa)

Bây giờ tôi chia 3 xấp bài đó thành 3 hàng theo kiểu.

Hàng I	2	11	20	7	16	6	15
Hàng II	5	14	1	10	19	9	18
Hàng III	8	17	4	13	3	12	21

Và tôi bốc lá bài số 10 lên, đó đúng là lá bài chọn của bạn.

Tôi có tài gì đâu ! Bạn để ý cách tôi sắp thành xấp, thành hàng thì bạn giải thích được tại sao tôi chọn "trúng phóc" lá bài chọn.

Nghe nói nhiều người tin rằng Bachet có đôi mắt thần, nhìn xuyên tờ giấy mật ghi số lá bài chọn.



## SỐ HOÀN CHÍNH : MỘT MÀN BÍ MẬT

Trong "Lịch sử môn số học" có lẽ "câu chuyện về số hoàn chính" chiếm một vị trí đặc biệt, vừa bí ẩn, vừa kì lạ, vừa phong phú...

Trước hết ta nhắc lại : Số hoàn chính là số bằng tổng các ước số của nó, trừ nó.

6 là số hoàn chính vì 6 có các ước số (trừ nó) là 1, 2, 3 và

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Tương tự như vậy, 28 là số hoàn chính ( $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ ).

Từ thời xưa tính hoàn chính của 6 và 28 đã được giải thích như sau :

Phải chăng 6 là số ngày mà thế giới được tạo ra và 28 phải chăng là số vòng mà Mặt trăng quay xung quanh Trái đất ?

Từ thời Oclit đã có định lí : Số  $2^{n-1}(2^n - 1)$  là số hoàn chính chẵn nếu  $2^n - 1$  là số nguyên tố.

(  $2^n - 1$  là số nguyên tố thì  $n$  là số nguyên tố. Nhưng ngược lại nếu  $n$  là số nguyên tố thì chưa chắc  $2^n - 1$  là số nguyên tố.)

2000 năm sau Ole chứng minh rằng công thức Oclit về số hoàn chính chứa toàn bộ số hoàn chính chẵn, còn số hoàn chính lẻ khác 1 có tồn tại hay không thì chưa ai khẳng định.

Số nguyên tố dạng  $2^n - 1$  gọi là số Mecxen (nhà toán học Pháp thế kỷ 17)

Vậy muốn tìm số hoàn chính chẵn chỉ sục tìm trong các số  $n$  nguyên tố, số nào thỏa  $2^n - 1$  là nguyên tố, thì ta sẽ có số hoàn chính  $2^{n-1}(2^n - 1)$ .

Ví dụ với  $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61$  ta có các số hoàn chỉnh chẵn tương ứng.

Người ta chứng minh được rằng mọi số hoàn chỉnh là một khúc của tổng  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

Mọi số hoàn chỉnh, trừ 6, là một khúc của tổng  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots$

Hơn nữa tổng nghịch đảo các ước của một số hoàn chỉnh (kể cả nó) bằng 2. Ví dụ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$$

Mọi số hoàn chỉnh, trừ số 6, đều đồng dư với 1 môđun 9. (ví dụ  $28 \equiv 496 \equiv 1 \pmod{9}$ )

Về số hoàn chỉnh có hai câu hỏi hóc búa được đặt ra :

Có số hoàn chỉnh lẻ khác 1 không ?

Có số hoàn chỉnh lớn nhất không ?

Về câu hỏi thứ nhất thì đến nay chưa ai tìm được số hoàn chỉnh lẻ khác 1, nhưng chưa ai chứng minh được là không có.

Câu hỏi thứ hai phụ thuộc vào câu hỏi : Số số Mecxen có vô hạn hay không ?

4 số Mecxen đầu tiên là 3, 7, 31, 127 ứng với  $2^n - 1$  trong đó  $n = 2, 3, 5, 7$ .

Các số hoàn chỉnh (chẵn) tương ứng là 6, 28, 496, 8128.

Trong vòng 70 năm các nhà toán học vẫn nghĩ số các số hoàn chỉnh là vô hạn vì khi thay  $n = 3, 7, 31, 127$  vào  $2^n - 1$  ta lại có các số Mecxen mới.

Nhưng khi xuất hiện số Mecxen thứ năm là  $2^{13} - 1$  thì mọi hy vọng của họ tiêu tan !

Đến năm 1953 nhờ máy tính IBM người ta mới bắt được  $2^{6191} - 1$  là hợp số ( $8191 = 2^{13} - 1$  là số Mersenne)

Đến ngày nay người ta cũng không biết được số số hoàn chỉnh là hữu hạn hay vô hạn.

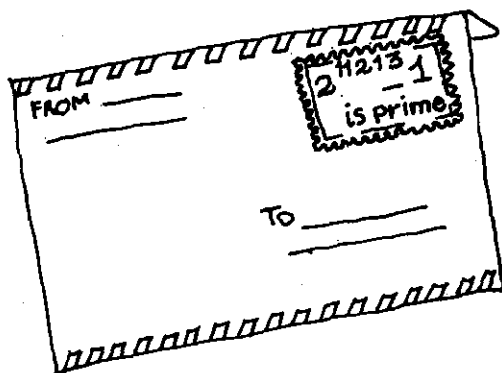
Đến năm 1876 nhà toán học Pháp đưa ra dự đoán rằng số  $2^{126}(2^{127} - 1)$  là số hoàn chỉnh.

Năm 1878 ông chứng minh được  $2^{127} - 1$  là số nguyên tố, nên điều dự đoán của ông là đúng.

Số nguyên tố  $2^{127} - 1$  là số nguyên tố lớn nhất mà con người tính được không dùng máy tính. Số này giữ kỉ lục là lớn nhất được 75 năm.

Đến 1963, người ta tìm được số hoàn chỉnh thứ 23 là  $2^{11213}(2^{11213} - 1)$  trên máy tính ở Đại học Ilini. Số này có 22425 ước số, và phải dùng 6751 chữ số để biểu diễn nó.

Để kỉ niệm sự kiện trọng đại này nhà nước Mỹ đã cho ra đời con tem đặc biệt ghi " $2^{11213} - 1$  is prime"



Chuyện về số hoàn chỉnh vẫn chưa "hết hồi kì dị".

Chữ số cuối của các số hoàn chỉnh bao giờ cũng là 6 hoặc 8. Nếu kết thúc bằng 8 thì trước đó liền kề là số 2.

Còn nếu kết thúc bằng 6 thì trước đó là 1, 3, 5 hoặc 7 (trừ 6 và 496).

Vậy sự xuất hiện chữ số 6 hay chữ số 8 ở vị trí cuối số hoàn chỉnh có theo một chu kì nào không ?

Quan sát các chữ số cuối ta thấy lần lượt xuất hiện : 6, 8, 6, 8, 6, 6, 8, 8, 6, 8, 8, 6, 8, 8, 6, 6, 6, 8, 6, 6, 6.

Có quy luật gì không ?

Ta tạm dừng ở đây về câu chuyện "số hoàn chỉnh".

Câu chuyện này còn lâu mới hoàn chỉnh, vì cứ vén được màn bí mật này, thì có màn bí mật khác phủ lên...

## LẠI MỘT MÀN BÍ MẬT : CẶP SỐ BẠN BÈ

Xét hai số 220 và 284. Tổng các ước của 220 (trừ nó) bằng 284, và tổng các ước của 284 (trừ nó) bằng 220.

220 và 284 được gọi là hai số bạn bè. Hai số này là hai số bạn bè nhỏ nhất mà người ta biết từ thời Pitago. Hai số này, hồi đó, tượng trưng cho tình bạn, sự thân thiện. Thời Trung cổ hai số này được ghi trên bùa chú để củng cố tình yêu đôi lứa.

Hai số bạn bè 17296 và 18416 được nhà toán học Pháp Fecma tìm ra năm 1636. Fecma và Đêcac độc lập nhau tìm được quy tắc cho

phép tìm một số cặp số bạn bè. Họ không biết rằng từ thế kỷ 9 một nhà toán học và thiên văn Ả-rập đã tìm được quy tắc đó.

Áp dụng quy tắc đó, Đêcac xác định được hai số bạn bè 9363584 và 9437056. Thế kỷ 18 Ôle lập ra bảng 64 cặp số bạn bè.

1830 Logiăngđơ, nhà toán học Pháp, tìm ra được một cặp nữa.

Năm 1867, Nhà toán học Ý Paganin, vào lúc 60 tuổi, đã làm sống sót giới toán học bằng cách đưa ra một cặp số bạn bè 1184 và 1210. Rõ ràng cặp này đã bị các nhà "săn số bạn bè" bỏ sót trong hàng trăm năm.

Hiện nay người ta đã tìm ra khoảng 600 cặp số bạn bè. Sau đây là các cặp nhỏ hơn 100.000

1.	220 và 284	8.	17296 và 18416
2.	1184 và 1210	9.	63020 và 76084
3.	2620 và 2924	10.	66928 và 66992
4.	5020 và 5564	11.	67095 và 71145
5.	6232 và 6368	12.	69615 và 87633
6.	10744 và 10856	13.	79750 và 88730
7.	12285 và 14595		

Hai số bạn bè hoặc đều chẵn, hoặc đều là lẻ. Tới nay, chưa thấy cặp nào mà tính chẵn, lẻ khác nhau. Chưa ai chứng minh được có hay không có cặp số bạn bè chẵn, lẻ khác nhau.

Các mệnh đề sau đây tỏ ra đúng mà chưa ai chứng minh được :



+ Các cặp số bạn bè lẻ đều chia hết cho 3.

(Ví dụ  $12.285 : 3 = 4.095$  ;  $14.595 : 3 = 4.865$ )

+ Tổng các chữ số tạo thành bởi hai số bạn bè chẵn chia hết cho 9.

(Ví dụ 1.184 và 1.210 thì  $(1 + 1 + 8 + 4) + (1 + 2 + 1 + 0) =$   
 $= 18$  chia hết cho 9 ; 66.928 và 66.992 thì  $(6 + 6 + 9 + 2 + 8) +$   
 $(6 + 6 + 9 + 9 + 2) = 63$  chia hết cho 9)

Chưa ai tìm được công thức cho cặp số bạn bè. Cũng chưa ai biết được số các cặp số bạn bè là hữu hạn hay vô hạn.

Tất cả đang còn nằm trong vòng bí mật, đợi chờ những bộ óc "siêu đẳng" gỡ bỏ dần dần...

## RỦI RO CON SỐ 13 !

Có thật là con số 13 đem lại điều rủi ro không, điều đó cũng chưa có một sự thống kê khách quan nào chứng minh.

Nhưng tránh né số 13 là một điều có thật.

Không ai dám làm gì trong ngày 13, vì sợ thất bại.

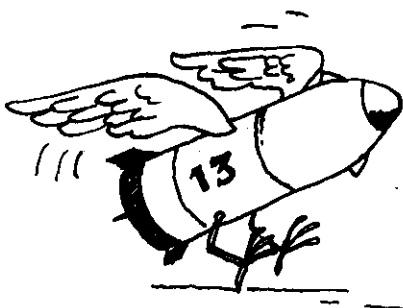
Không ai dám tham gia một tổ chức 13 người làm điều gì, vì thế nào cũng có người gặp nguy hiểm, hoặc công việc thất bại.

Khách sạn không có tầng 13. Không có phòng ngủ số 13, vì không ai dám thuê.

Người Phương Tây đặc biệt rất sợ ngày 13, nhất là lại trùng vào ngày thứ Sáu.

Ở thời đại vũ trụ, con số 13 vẫn bị kiêng kỵ thật sự.

Phi thuyền Apôlô 13 bị trục trặc, phải hạ cánh vào giây thứ 13. Để tránh số 13, các phi hành gia cố tình kéo dài thời gian để được rút xuống biển vào giây thứ 14.



Tại sao số 13 lại đem lại rủi ro ? Có lẽ xuất phát từ một câu chuyện trong Kinh Thánh.

Chuyện kể rằng Đức Chúa có 13 Thánh Tông Đồ thì ông

Thánh thứ 13 là Giuđa là kẻ phản bội, đem bán Chúa cho quân "dị giáo".

Ngày nay, ở thời đại khoa học, không ai tin điều mê tín dị đoan nhảm nhí.

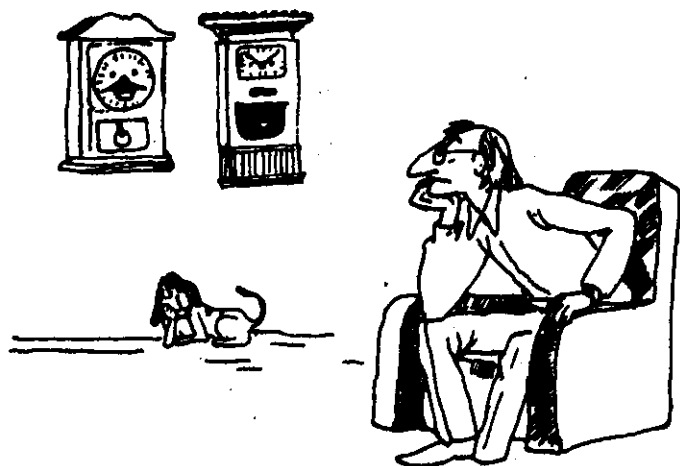
Nhưng tâm lí "có kiêng, có lành" vẫn còn phổ biến, và vẫn có tác dụng nhất định trong cuộc sống của con người.

(Tác giả xin thú thật là không dám đi máy bay ngày 13).

## CHỌN ĐỒNG HỒ NÀO ?

Charles L. Dodgson, thường được biết dưới tên Lewis Carroll, tác giả của cuốn "Alice ở xứ sở của những điều kì diệu", là người rất nổi tiếng về những lí lẽ toán học, mới nghe thì kì quặc, nhưng càng nghĩ càng thấy sâu sắc một cách thú vị. Ông đưa ra nghịch lí sau đây :

Tất cả mọi người đều thống nhất với nhau rằng, đồng hồ tốt là đồng hồ chỉ đúng giờ nhiều lần.



Giả sử có hai cái đồng hồ : một chiếc chạy chậm mỗi ngày một phút, (chiếc A), và một chiếc không chạy được (chiếc B).

Ta chọn cái nào ? Mọi người, hầu như không trừ ai, đều chọn đồng hồ chạy chậm mỗi ngày một phút. Như vậy là đã vi phạm vào tiêu chuẩn "đồng hồ tốt" trên kia.

Thật vậy, đồng hồ A chạy chậm mỗi ngày một phút, thì phải mất 720 ngày mới chỉ lại giờ đúng, vì trong 12 giờ (ví dụ từ 6 giờ chiều đến 6 giờ sáng) có 720 phút.

Trong khi đó đồng hồ B (đồng hồ chết) trong một ngày (24 giờ) có ít nhất hai lần chỉ đúng giờ. (Ví dụ 6 giờ sáng, 6 giờ chiều)

Rõ ràng đồng hồ B, tuy là đồng hồ chết suốt đời, có số lần chỉ đúng giờ cao hơn đồng hồ A tới  $2 \times 720 = 1.440$  lần !

Xin miễn bình luận.

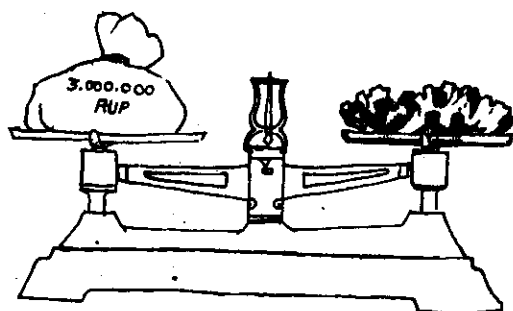
## MỘT DẤU PHẤY GIÁ BAO NHIÊU ?

Trong văn học, toán học vai trò của dấu phẩy quá quan trọng, xin miễn bàn !

Để minh họa cho tầm quan trọng của dấu phẩy trong văn học, người ta thường dùng câu sau đây, trong đó dấu phẩy, do đặt sai, dẫn đến câu văn :

"Ông tôi đội mũ, trên đầu mang giày, dưới chân đeo kính, nơi mắt quàng khăn, nơi cổ cầm can, trên tay..."

Trong toán học, mà cụ thể là trong thống kê, dấu phẩy để sai có thể đi tù như chơi.



Nhưng chưa ai biết một dấu phẩy giá bao nhiêu: 300 triệu rúp ! Các bạn có tin không. Xin đọc đoạn tin sau đây trong tạp chí "Bình luận quân sự" của Liên Xô (trước đây) :

"Trong thế kỷ tin học những sai sót ngẫu nhiên tương tự đã để lại hậu quả thiệt hại không nhỏ. Thí dụ để nghiên cứu Sao Hỏa, Liên Xô đã phóng hai trạm tự động Phobos-1 và Phobos-2. Khi phát lệnh điều khiển từ Trái Đất, người lập chương trình đã sai sót một dấu phẩy. Thế là trạm Phobos 1 đã mất định hướng và không liên lạc được với Trái Đất. Theo tính toán khiêm tốn nhất, sai sót đó đã phải trả giá ít nhất 300 triệu rúp !"

300 triệu rúp là bao nhiêu tiền đồng VN ?

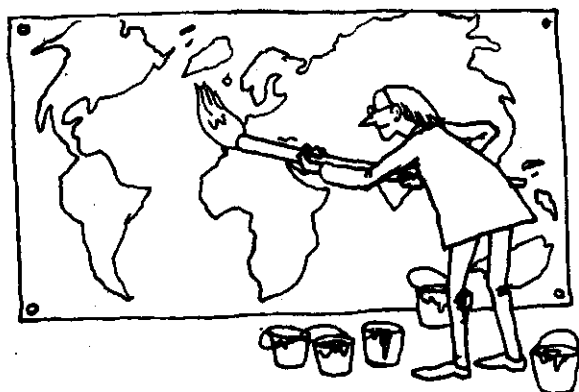
### MẤY MÀU TÔ TỐT BẢN ĐỒ ?

Kinh nghiệm cho các nhà vẽ bản đồ biết rằng chỉ cần có 4 màu để vẽ bản đồ các nước trên mặt phẳng, hay trên mặt cầu, thỏa điều kiện hai nước có biên giới chung phải được tô bằng hai màu khác nhau (gọi là điều kiện tô tốt). (Biên giới chung là một đường chung cho hai

hay nhiều nước; Hai nước có một điểm chung thời thì điểm đó không gọi là biên giới chung).

Kinh nghiệm cho biết như vậy, nhưng chứng minh rằng "chỉ cần có 4 màu là đủ để tô các bản đồ thỏa điều kiện tô tốt" là một bài toán cực kì khó, làm náo động các nhà toán học hàng trăm năm.

Cho đến năm 1950 người ta chỉ mới chứng minh được rằng : mọi bản đồ có không quá 38 nước đều có thể tô tốt bằng 4 màu.



Mãi tới năm 1976 bài toán "tô tốt với 4 màu" mới được giải quyết trọn vẹn nhờ máy tính điện tử.

Kết luận cuối cùng là : "Mọi bản đồ đều có thể tô tốt bằng 4 màu" nói cách khác : "chỉ cần tối đa là 4 màu là đủ để tô tốt mọi bản đồ".

Cần chú ý là trong khi bài toán "tô tốt với 4 màu" còn chưa được giải quyết thì người ta đã chứng minh được : "Mọi bản đồ đều có thể tô tốt bằng 5 màu" hay là "Với 5 màu thì đủ để tô tốt mọi bản đồ".

Bản đồ mà ta nói ở trên là bản đồ phẳng hoặc nằm trên mặt cầu.

Người ta đã tìm được một ví dụ rất thú vị trong đó phải có 7 màu và đúng 7 màu mới tô tốt một bản đồ vẽ trên một mặt xuyên.

Các vấn đề nói ở trên không phải là chuyện "ngồi buồn kiếm chuyện mà làm", mà chính là những biểu hiện của một ngành toán học sâu sắc, đó là tô pô học.

## AI VẼ BẢN ĐỒ CHÍNH XÁC ĐẦU TIÊN

Nói đến bản đồ địa lí là nghĩ ngay đến các nhà hàng hải kiểu như Christophe - Colomb.

Nhưng... không phải những nhà hàng hải là những người đầu tiên vẽ ra các bản đồ địa lí chính xác, mà chính các nhà toán học, mà người đi đầu là Gauzơ đã đi tiên phong trong lĩnh vực này.

Gauzơ đã bỏ ra 10 năm ròng để xây dựng một môn khoa học mới tên là Trắc địa học cao cấp mà dựa vào đó người ta mới có thể biểu diễn trên bản đồ tương quan khoảng cách trên Mặt Trái đất hình cầu, một cách chính xác và dễ sử dụng. Ông đã tự tay vẽ những bản đồ chính xác cho Vương quốc Ha-nô-vơ.

Ole cũng đã có những đóng góp đáng kể trong kĩ thuật vẽ bản đồ. Ông đã giúp chính phủ Nga thời đó đào tạo các nhà bản đồ học cho ngành hàng hải Nga.

# VIET – ÔNG TỔ CỦA KÍ HIỆU TOÁN HỌC

(FRANCOIS VIÈTE 1540 – 1603)

Viet được xem là người cha của cách dùng chữ thay số trong đại số

Ông là một luật sư và nhà hoạt động chính trị, giúp Vua Hăngri III và Vua Hăngri IV trong nhiều vấn đề khoa học và quân sự.

Trong cuộc chiến tranh giữa Tây Ban Nha và Pháp, nhờ ông giải được những mật thư của quân Tây Ban Nha gửi cho "quân nội ứng" trên đất Pháp, mà Pháp đã thắng trận.

Quân Tây Ban Nha coi Viet là kẻ thù số một và tuyên án vắng mặt Viet với hình phạt bị thiêu trên dàn lửa.

Công trình của Viet về đại số rất phong phú.

Biểu diễn tổng và tích các nghiệm qua các hệ số của phương trình; Tìm nghiệm gần đúng các phương trình; Giải tam giác cầu; Phân tích  $\sin x$  và  $\cos x$  theo  $\sin x$ ,  $\cos x$ .

Viet còn giải bài toán của Apollonius bằng thước và compa, nên người ta còn gọi Viet là Apollonius Pháp.

Chính ông đã chứng minh  $\frac{2}{\pi}$  là giới hạn của tổng

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \dots$$

## AI PHÁT MINH RA MỘT SỐ KÍ HIỆU TOÁN HỌC

Ngày nay, ngay từ lớp một, học sinh đã biết một số kí hiệu toán học như cộng (+), trừ (-), bằng (=).

Nhưng nhân loại đã phải mất vài nghìn năm mới đi đến được những kí hiệu đơn giản mà cần thiết đó.

Trước khi có các kí hiệu người ta phải dùng lời; dùng chữ để mô tả quan hệ số lượng và hình dạng.

Ví dụ để mô tả  $(a + b) - c$  người ta phải viết "a cộng với b, rồi lấy kết quả trừ đi c". Ngay dùng a, b, c để thay cho con số cũng phải mất hàng ngàn năm...

Người đầu tiên dùng kí hiệu thay cho lời nói là L. Pasoli, người Ý, vào cuối thế kỷ 15. Pasoli dùng kí hiệu  $\bar{p}$  thay cho "cộng" và  $\bar{m}$  thay cho "trừ" (tiếng la tính cộng là plus, trừ là minus).

Sau đây ta liệt kê lại các kí hiệu thường dùng trong toán sơ cấp, kèm theo ý nghĩa, người đưa ra cách dùng và năm bắt đầu được sử dụng kí hiệu đó :

Dấu và kí hiệu	Ý nghĩa	Người đưa ra cách dùng	Năm
+	cộng	CH. Rudolphe	1524
-	trừ	nt	nt
×	nhân	G. Oughtred	1631
.	nhân	G. Leibnitz	1684
:	chia	nt	nt
$a^2, a^3, a^n$	lũy thừa	R. Descartes	1637
$\sqrt{\quad}; \sqrt[3]{\quad}$	căn thức	CH. Rudolphe	1525
$f(x)$	hàm	J. Bernouilli	1718
		L. Euler	1734
=	bằng	R. Record	1557
>	lớn hơn	T. Harriot	1631
<	nhỏ hơn	nt	nt
≡	trùng với	C. Gauss	1801
//	song song	G. Oughtred	1677
⊥	vuông góc	P. Erigon	1634
≠	khác	T. Harriot	1631
≈	gần bằng	nt	nt

Thời kì mà dấu +, -, ( ),  $\sqrt{\quad}$  chưa sử dụng như ngày nay người ta dùng

R.c thay cho  $\sqrt[3]{\quad}$

R.q thay cho  $\sqrt{\quad}$

p thay cho +

m thay cho -

[ ] thay cho ( )

Sau đây là một ví dụ lấy trong cuốn sách của nhà toán học Bombeli (1572)

$$R.c [R.q 4352p16] m.R.c [R.q 4352m16]$$

Diễn đạt theo kí hiệu bây giờ là

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16} - \sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}.$$

### LỊCH SỬ KÍ HIỆU BẰNG NHAU "="

Người viết nhiều sách về khoa học nói chung, và toán học nói riêng vào thế kỉ thứ 16 ở Anh, là Robert Recorde (khoảng 1510 – 1558). Cuốn số học của ông được viết dưới dạng đối thoại giữa người dạy và người học. Cuốn sách có tên kì lạ là "Miền đất của nghệ thuật". (The ground of Arts), được xuất bản năm 1542, và được tái bản tới 29 lần !

Recorde không chỉ viết về số học, mà còn viết về thiên văn, hình học, y học, đại số.

Đáng chú ý nhất về mặt lịch sử là cuốn Đại số có tên "Sự kích thích trí thông minh", công bố năm 1557. Trong cuốn này lần đầu tiên kí hiệu "=" được dùng để chỉ sự bằng nhau.

Tại sao Recorde dùng kí hiệu này ?

Ông giải thích : "Vì không thể có hai vật nào bằng nhau hơn thế nữa"

Đúng là một lời giải thích "không thể đơn giản và rõ ràng hơn thế nữa" !

Nhưng ... Viet nhà toán học Pháp thế kỉ 16 lại dùng kí hiệu "=" để chỉ sự khác nhau ! (theo Howard Eves trong An introduction to the History of Mathematics – Third Ed. 1969). Tại sao ? Không có lẽ ta lại giải thích rằng "Vì không thể có hai vật nào khác nhau hơn thế nữa".

Vậy thì, theo tác giả, cái gì mà thuộc phạm trù quy ước, thì tốt nhất là đừng giải thích nữa. Cứ hiểu và làm theo quy ước.

## ĐÔI MẮT THIÊN CỦA CHUQUET

Ba người tên A, B, C ngồi trước mặt bạn. Mỗi người cầm trong tay một trong ba hòn bi : bi màu xanh, bi màu ve, bi màu tím.

Làm sao biết ai cầm bi màu nào ?

Bạn làm như sau : Bạn lấy 24 que tăm, đưa người thứ nhất 1 que, người thứ hai 2 que, người thứ ba 3 que.

Còn lại 18 que, bạn yêu cầu ai cầm bi xanh thì lấy thêm số que bằng số que đã cầm, ai cầm bi ve thì lấy thêm gấp đôi số que đã cầm, ai cầm bi tím thì lấy thêm gấp bốn số que đã cầm. *Chú ý là bạn không có quyền nhìn khi họ lấy thêm.*

Với số que còn lại bạn sẽ nói "trúng phóc" ai cầm bi màu gì.

*Bài giải*

Gọi bi xanh là a, bi ve là e, bi tím là i.

Bạn phát cho A 1 que, phát cho B 2 que, phát cho C 3 que.

Có 6 trường hợp xảy ra sau đây tùy theo A, B, C cầm trong tay bi màu gì.

Trường hợp		A	B	C	que còn lại
1	Mau bi (M) que phát (P) que lấy thêm (T) cộng ( $\Sigma$ )	a 1 1 2	e 2 4 6	i 3 12 15	$24 - 23 = 1$
2	M P T $\Sigma$	e 1 2 3	a 2 2 4	i 3 12 15	$24 - 22 = 2$
3	M P T $\Sigma$	a 1 1 2	i 2 8 10	e 3 6 9	$24 - 21 = 3$
4	M P T $\Sigma$	e 1 2 3	i 2 8 10	a 3 3 9	$24 - 19 = 5$
5	M P T $\Sigma$	i 1 4 5	a 2 2 4	e 3 6 9	$24 - 18 = 6$
6	M P T $\Sigma$	i 1 4 5	e 2 4 6	a 3 3 6	$24 - 17 = 7$

Chẳng hạn như trường hợp 5 (trên bàn còn thừa 6 que) :

Bạn phát cho A 1 que, B 2 que, C 3 que, mà trên bàn còn thừa 6 que thì dứt khoát A cầm bi màu tím, B cầm bi màu xanh, C cầm bi màu ve, v.v...

Tóm lại chỉ nhìn số que còn lại trên bàn là bạn biết A, B, C cầm bi màu gì.

Ông Bachet de Méziriac đã đưa "chìa khóa" sau đây để biết ngay ai cầm bi gì.

Par fer	César	jadis	devint	Si grand	prince
1	2	3	5	6	7

Dịch câu trên : nhờ sắt thép (khí giới) César ngày xưa trở nên hoàng tử vĩ đại đến thế

Ví dụ : trên bàn còn lại 3 que, ứng với chữ "jadis" có a đi trước, rồi i. Điều đó cho biết ngay là A cầm bi xanh, B cầm bi tím, dĩ nhiên C cầm bi ve; trên bàn còn lại 6 que, ứng với "si grand" cho biết A cầm bi tím, B cầm bi xanh, dĩ nhiên C cầm bi ve.

## HÓA HỌC VÀ "CÂY" TOÁN HỌC

Từ "cây" gợi cho ta gốc, cành, lá, quả, như ta đã thấy trong thiên nhiên. Từ "cây" trong toán học, tuy được gợi ý từ hình ảnh thực, nhưng được hiểu một cách chặt chẽ hơn.

"Cây" là một hình liên thông, mà tính liên thông bị mất đi, nếu ta "cắt" một "cành" của nó.

Hình A là "cây" vì cứ "cắt" một "cành" là tính liên thông bị mất ngay.

Hình B không phải là "cây", vì ví dụ, cắt "cành" mn thì tính liên thông vẫn còn.

Chỗ gặp của 2 "cành" gọi là "nút"

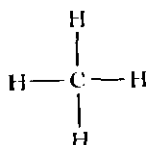
Người ta chứng minh được rằng mọi cây có

$$\text{Số nút} = \text{số cành} + 1.$$

Người ta cũng chứng minh được : Một hình liên thông mà số nút bằng số cành cộng 1 thì hình đó là "cây"

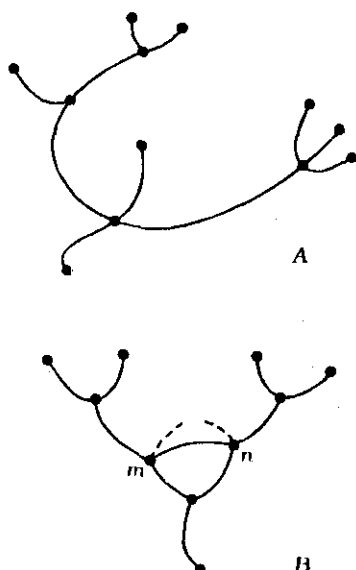
Các nhà toán học cũng bỏ ra khá nhiều công sức để nghiên cứu "cây", vì kết quả của các công trình được áp dụng rất nhiều trong thực tế.

Từ 1847 G.Kirchhoff áp dụng "lí thuyết cây" vào khả năng phân nhánh của dòng điện. Sau đó, Cayley đã nghiên cứu áp dụng lí thuyết cây vào hóa hữu cơ.



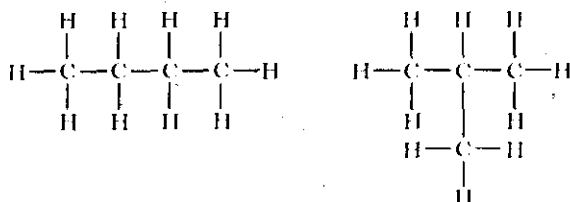
Ta lấy ví dụ về công thức metan  $\text{CH}_4$ , được biểu diễn theo hình "cây"

Công thức cấu tạo một parafin cũng là một cây.



Với công thức  $C_nH_{2n+2}$  có bao nhiêu "cây" khác nhau ?

Với  $n = 1, 2, 3$  ta có ba thành phần của parafin. Với  $n = 4$  ta gặp một hiện tượng mà trong hóa học gọi là đồng phân : có hai butan tuy công thức thực nghiệm giống nhau, nhưng khác nhau về tính chất hóa học và công thức cấu tạo. Lí do là vì với  $C_4H_{10}$  ta có hai "cây" và hai "cây" mà thôi :



Một "cây" biểu hiện cho một kiểu liên kết hóa học

Nhờ lí thuyết "cây" mà năm 1874 Cayley tiên đoán về lí thuyết có 8 dẫn xuất của pentan pentanol  $C_5H_{11}OH$ . Thời của ông, người ta mới tìm ra hai chất. Năm 1901 nhà toán học Đức W.Ahrens đã viết "Trong 8 số liên kết có thể có về mặt lí thuyết thì 7 đã được biết". Về sau các sách giáo khoa có nói đến đủ 8 dẫn xuất.

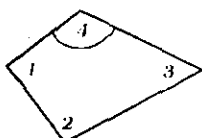
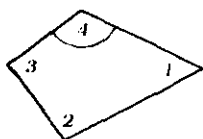
Sự hợp tác giữa toán học và hóa học thật là hoàn hảo, đẩy sức thuyết phục.

Có thể nói là Cayley đã sản xuất ra "chất mới trên đầu ngọn bút".

## TOÁN HỌC TRONG SỮA CHUA (Y-A-UA)

Toán học áp dụng vào hóa học thì không có gì đáng phải nói.

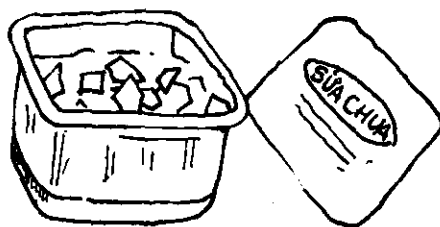
Nhưng liên hệ được toán học với sữa chua thì kể ra cũng lí thú !



Ta đã biết một tứ giác phẳng, nếu đánh số các góc theo thứ tự, thì khi đã cố định một góc, ví dụ góc 4, ta có hai cách đánh số; theo chiều thuận hoặc nghịch với kim đồng hồ (hình bên)

Nói chung đa giác phẳng có hai cách đánh số góc như vậy, khi đã cố định một góc.

Hóa học hữu cơ đã lợi dụng cách đánh số này mà giải thích được tính chất quang học của một vài liên kết cacbon không đối xứng (ví dụ như sữa chua)



C\* không đối xứng (theo Vant Hoff và Lebel) có hai dạng liên kết - dạng quay bên phải và dạng quay bên trái, và chỉ có hai dạng mà thôi, y như cách đánh số của tứ giác phẳng đã nói ở trên vậy.

Chú ý là C có hoá trị 4.

## CON ONG - "NHÀ TOÁN HỌC"

Người ta thường nói : "Cái gì do thiên nhiên sáng tạo ra, đều có lí do, đều hợp lí..."

Câu nói đó, áp dụng vào trường hợp ong làm tổ, thấy có lí một cách tuyệt diệu.



Từ hàng tỉ năm nay (cứ tạm cho là như vậy) ong vẫn làm tổ. Nhưng chắc nó cũng không ngờ, hình dạng của tổ ong là một công trình tuyệt diệu về hình học. Vấn đề đặt ra là hình dạng của tổ phải như thế nào để tổ bền vững nhất, tốn ít sáp nhất mà lại có thể tích lớn nhất.

Quan sát tổ ong ta thấy miệng lỗ là các hình lục giác đều khép khít nhau. Trước hết lỗ không tròn, vì các hình tròn xếp kề nhau còn có khe hở, phải tốn sáp trám lại.

Các đa giác đều xếp khít nhau chỉ có 3 loại : tam giác, hình vuông, lục giác.

Tam giác bị loại vì có 6 vách ngăn.

Hình vuông bị loại vì có 4 vách ngăn.

Ông chọn lục giác đều chỉ có 3 vách ngăn !

Hơn nữa, để ông chui được vào lỗ, nếu lỗ hình tam giác thì chu vi phải bằng 24,4mm, lỗ hình vuông thì chu vi bằng 18,7mm, lỗ hình lục giác đều thì chu vi chỉ có 16,6mm.

Đáy các lỗ tổ ong không phẳng, mà là ba hình thoi ghép lại với nhau.

Vấn đề là góc hình thoi phải bằng bao nhiêu độ để ít tốn sáp nhất.

Nhà toán học Đức Samuel Koenig (1712 - 1757) đã tính và cho biết các góc đó xấp xỉ  $109^{\circ}28'$  và  $70^{\circ}32'$

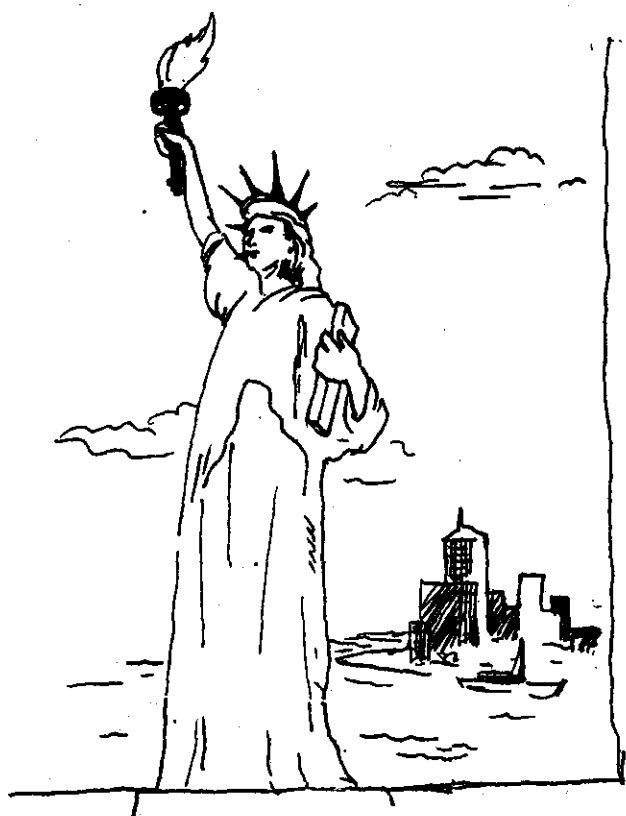
Đo trên tổ ong thấy các góc đúng bằng  $109^{\circ}28'$  và  $70^{\circ}32'$ .

Về sau nhà toán học xứ Xcôtlen là Mac Laurin, năm 1713 đã chứng minh là các góc đó phải đúng bằng  $109^{\circ}28'$  và  $70^{\circ}32'$ . Hóa ra ông làm toán chính xác hơn Koenig !

Mà cũng thật kì lạ, hình như ông dạy nhau, tổ ong nào trên thế giới cũng làm tổ đúng hình dạng và kích thước như thế. Cho nên có người đề nghị lấy kích thước tổ ong làm đơn vị đo !

## NHỮNG CON SỐ CỦA TƯỢNG NỮ THÂN TỰ DO

Con tàu lênh đênh ngoài biển khơi, vừa vào đến địa phận duyên hải New York, khách viễn du đã có thể nhìn thấy ánh bó đuốc do cánh tay phải của Nữ Thân Tự do giương cao trên bầu trời.



Ở đây ta chỉ chú ý đến tương quan giữa các chi tiết của tượng. Có phải tượng này đồng dạng với "mẫu người tự do lí tưởng" ? Ta thử khảo sát các con số :

Độ cao từ nền đến đuốc	92,97 mét
Độ cao từ chân pho tượng đến ngọn đuốc	46,04m
Độ cao bề tượng bằng đá cẩm thạch	27,13m
Độ cao nền dưới bề tượng	19,81m
Mặt tượng rộng (từ tai nọ sang tai kia)	3,05m
Khoảng cách giữa hai mắt	0,61m
Mũi dài	1,35m
Mồm rộng	0,91m
Cánh tay phải cầm đuốc dài	12,80m
Bàn tay dài	5,00m
Ngón tay trở dài	2,43m
Móng tay rộng 0,25m dài	0,33m
Trọng lượng tượng	325 tấn.
Quả là một bức tượng khổng lồ !	

## BÀNG CÁCH NÀO ĐI DU LỊCH NHIỀU NHẤT

Trong "Câu lạc bộ những người du lịch" người ta tranh cãi nhau :  
Thế nào gọi là đi du lịch nhiều nhất.

Có rất nhiều ý kiến :

- Đi du lịch nhiều nhất là đi nhiều nước nhất
- Đi du lịch nhiều nhất là đi dài ngày nhất

— Đi du lịch nhiều nhất là đi được đoạn đường dài nhất.

Không ai chịu ai.

Một nhà toán học đề nghị : Đi du lịch nhiều nhất là đi khắp các kinh tuyến và vĩ tuyến của Quả Đất.

Định nghĩa đó nghe cũng có lí !

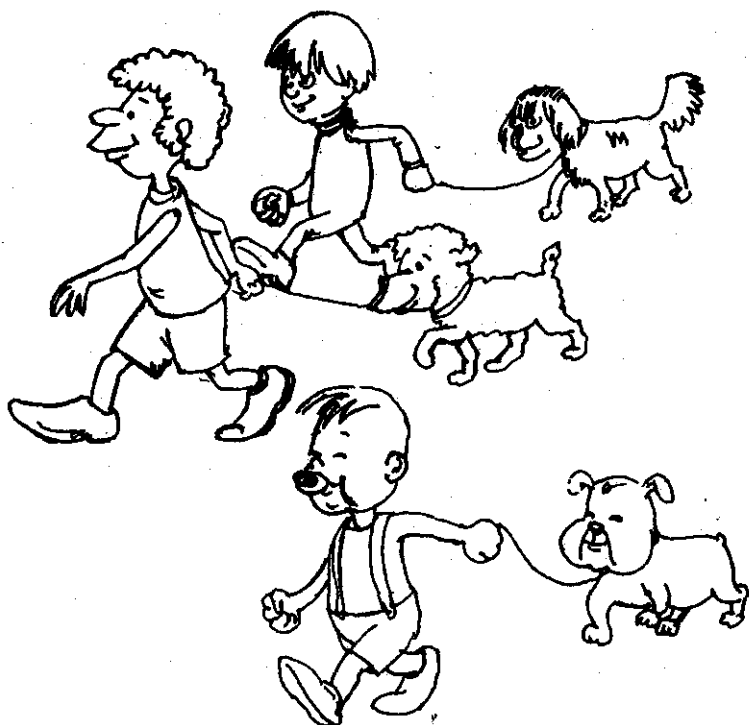


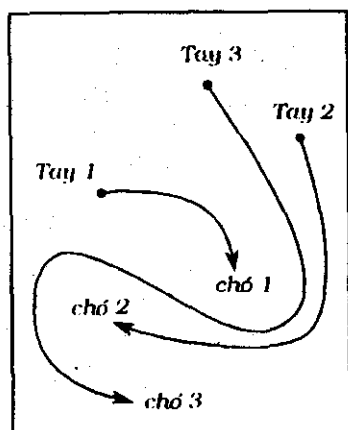
Nhà toán học lại đặt tiếp câu hỏi : Nếu cho rằng chu vi Quả Đất là 4.000km thì muốn đi khắp các kinh tuyến, khắp các vĩ tuyến, phải đi tối thiểu bao nhiêu km ?

Các vị hội viên nhìn nhau, không biết tính ra sao. Có người nói là phải đi ít nhất một vòng 40.000km. Có người nói phải đi từ Bắc cực xuống Nam cực theo hình xoắn tròn ốc...

Nhà toán học giải thích : chỉ cần 20.000 km và vài km. Thật vậy, tất cả các kinh tuyến đều gặp nhau ở Bắc cực (và Nam cực), nên chỉ cần xuất phát từ Bắc cực (hoặc Nam cực), đi theo một kinh tuyến nào đó vài km đến một vĩ tuyến gần nhất, đi một vòng vĩ tuyến đó, trở về chỗ cũ, đi dọc theo kinh tuyến xuất phát đến tận Nam cực. Thế là đã đi hết các kinh tuyến và vĩ tuyến của Quả Đất. Như vậy chỉ cần đi nửa chu vi (20000km) và vài kilômet !

### BÀI TOÁN "DẮT CHÓ"





Báo "Thiếu niên Tiên phong" của Liên Xô (cũ) số 4 năm 1969 có ra bài toán "Ba sợi dây dắt chó".

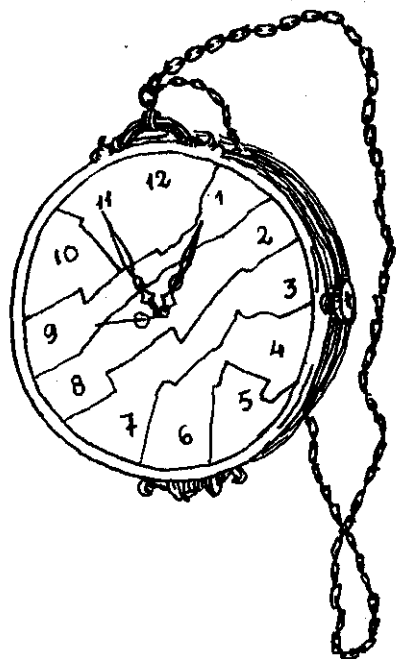
Trên hình vẽ không vẽ các sợi dây. Các em hãy vẽ các sợi dây đi từ bàn tay chủ đến con chó của mình, làm sao cho không có sợi dây nào đựng sợi dây nào trên hình vẽ, mà cũng không chạm vào đường biên của hình vẽ.

## ĐỒNG HỒ RẠN NỨT KIỂU NÀO CHO HÈN (\*) ?

Ai cũng biết Thụy Sĩ là nước nổi tiếng về sản xuất đồng hồ đẹp, chính xác, sang trọng.

Làm rơi đồng hồ, để mặt kính rạn vỡ là điều rất kiềng, báo hiệu điều không may sẽ đến.

Nhưng nếu mặt kính đồng hồ rạn thành 6 mảnh, ở mỗi mảnh có tổng các chữ số bằng 10, thì đó là điều rất hên (\*).



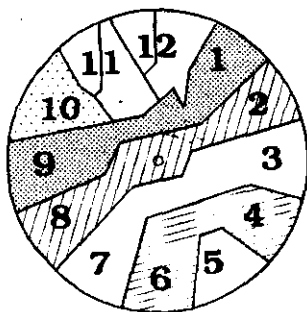
(\*) Người miền Nam dùng từ "hên", "xui". Người miền Bắc dùng từ "may". "rủi".

Hoặc là sắp trùng xố số, hoặc là đi thi đậu...

Điều hên đó có thể xảy ra được không ?

Mặt kính đồng hồ "phải rạn" như thế nào để xảy ra điều hên đó ?

Lời giải được thể hiện ở hình bên.



Nhưng làm sao để đồng hồ khi rơi, rạn theo kiểu đó, là điều "bất khả thi" trên thực tế. Trừ phi khi làm đồng hồ, người thợ có tình "xẻ rãnh ngầm" trên mặt đồng hồ.

## LẬP LÁNH TÀI NĂNG TOÁN HỌC

Sarat Adin A TuXi là nhà toán học Iran thế kỉ thứ 13. Ông có viết cuốn sách về tính tiệm cận của các hypebol. Ông cũng đã đưa ra một phương pháp độc đáo giải phương trình bậc ba, gần với phương pháp Hoocne.

\*  
\*   \*

Iôgan Toralex là nhà toán học Đức đầu thế kỉ 19, người đưa ra công thức gần đúng

$$\sin x = x(\cos x)^{\frac{1}{3}} \text{ và } \operatorname{tg} x = \frac{x}{(\cos x)^{2/3}}$$

\*  
\* \*

Tômat Anva là nhà toán học Bồ Đào Nha thế kỉ 16 ông là người đầu tiên đưa ra công thức

$$1 + 2x + 3x^2 \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{với} \quad |x| < 1.$$

Phép chứng minh được viết hoàn toàn bằng lời văn, dựa vào kiến thức về tổng vô hạn của một cấp số nhân lùi.

\*  
\* \*

Tèetè nhà toán học Hi Lạp thế kỉ thứ 4 trước Công nguyên, học trò của Platon là người đã chứng minh tính vô ước của đường chéo hình vuông với cạnh của nó.

Là người bổ sung khối "nhị thập diện đều" vào 4 khối đa diện đều đã biết, nghiên cứu về các khối đa diện đều dựa trên lí thuyết về số vô tỉ.

\*  
\* \*

Ângdrê Takê nhà toán học Bỉ thế kỉ 17 đã chứng minh công thức tổng vô hạn của một cấp số nhân lùi vô hạn, không dùng chữ thay số, mà chỉ miêu tả phép chứng minh hoàn toàn bằng lời văn. Ông cũng là người đã đưa ra công thức số tổ hợp n phần tử chập m.

Có thử chứng minh tiên đề V của Occlit.

\*  
\* \*

Xtêvin Ximông nhà toán học Hà Lan thế kỉ 17 người đầu tiên dùng hệ đo thập phân và phân số thập phân (lúc đó ở châu Âu người ta chưa biết rằng phân số thập phân đã được An CaSi sử dụng), đưa nghiệm âm vào việc giải phương trình, xác định điều kiện tồn tại của nghiệm trong một khoảng cho trước, đưa ra phép tính nghiệm gần đúng.

Xritkhara nhà toán học Ấn Độ đã đưa số không (số 0) vào sử dụng rộng rãi trong toán học.

\*  
\* \*

Règhiomôngtan nhà toán học Đức thế kỉ 15 là một trong những người đầu tiên ở châu Âu đưa lượng giác thành một môn học độc lập với thiên văn học; người đầu tiên áp dụng lượng giác để giải các bài toán hình. Ông là người đưa hàm số tang vào lượng giác (ông không biết rằng từ thế kỉ thứ 10 ở Trung Đông đã có hàm số tang và "đường tang" đã được Bravadin sử dụng); Chính ông là người lập ra bảng sin đến từng phút với độ chính xác đến 8 chữ số thập phân, và lập bảng tang đến từng phút.

\*  
\* \*

I Sác Vônfram nhà toán học thế kỉ 18, người Hà Lan, một tấm gương về tính kiên trì trong tính toán. Chính ông là người đã lập ra bảng lôgarit tự nhiên cho các số từ 1 đến 10.000 với 48 chữ số thập phân (năm 1778).

Ông cũng đã tính lôgarit các số nguyên tố với 63 cho đến 68 chữ số thập phân.

Ngày nay các bảng tính này không còn có giá trị thực tiễn nữa, nhưng hồi đó, bảng tính này là một đỉnh cao về công trình khoa học, chứa đựng biết bao nhiêu công sức của tác giả...

\*  
\* \*

Giôn Vinxơn (1741 - 1793) nhà toán học Anh. Chính ông đã chứng minh " $p$  là số nguyên tố khi và chỉ khi  $(p - 1)! + 1$  chia hết cho  $p$ "

Nhưng người công bố định lí này là Varinh, năm 1770.

\*  
\* \*

Vítman (1460 - 1498) nhà toán học Đức, tác giả cuốn "Phép tính toán nhanh chóng và đẹp để dùng cho mọi người buôn bán". Trong cuốn này lần đầu tiên xuất hiện dấu cộng (+) và dấu trừ (-), bảng phép nhân. Chính ông là người đưa ra phép thử bằng số 9 và số 7. 28 dạng bài toán về tam suất cũng do ông đề ra, rất được sử dụng hồi đó.

## THƯ MỤC SÁCH THAM KHẢO CHÍNH

1. *Đại số giải trí*. Perelman. Nhà XB Mir Matxcova 1990
2. *Hình học giải trí*. Perelman. Nhà XB Mir Matxcova 1989
3. *Không sợ toán học*. J.Seddláček.  
Đại học Sư phạm Qui Nhơn 1988
4. *Đến với Vương quốc kì lạ*. Nguyễn Việt Bắc.  
Báo khăn quàng đỏ 1987
5. *Ông Hoàng và người đẩy tổ của khoa học*. Xuân Trung.  
Nhà XB Kim đồng 1980
6. *Các nhà toán học xuất sắc*. Borôđin 1987
7. *Toán học và chất lãng mạn*. Kôvanxôp.  
Nhà XBKH & KT 1986
8. *Phương pháp luyện trí não*. Quang Minh.  
Nhà XB thông tin 1991
9. *Những khả năng của con người* (Bản tiếng Pháp). Pêkêlitx.  
Nhà XB Mir 1977
10. *Fantaisies et paradoxes mathématiques*.  
E.P.Northop Dunod Paris 1961
11. *Đố vui toán học*. Xem Lôđơ.  
Nhà XB Đà Nẵng 1987
12. *Toán phát triển*. Nguyễn Minh Sửu.  
Nhà XB Đại Chúng 1971

13. *Toán học quan sát.* Nguyễn Minh Sử.  
Nhà XB Đại Chúng 1971
14. *Danh nhân toán học.* Lê Hải Châu.  
Nhà XBGD 1989
15. *Lịch sử hình học.* Văn Như Cương.  
Nhà XBKH & KT 1977
16. *Khả năng và chắc chắn.* Êmin Boren.  
Nhà XBKHKT 1969
17. *Một số quan điểm triết học trong toán học.* Rudavin.  
Nhà XBGD 1979
18. *Sáng tạo toán học.* Pôlya.  
Nhà XBGD 1975
19. *Logic vui.* Kônman.  
NXBKH Matxcova 1966
21. *Nhập môn về lịch sử toán học.* H.Ivơ.  
Nhà XBKHKT 1993.

## MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
1. Ma phương cháu Á	5
2. Định lí Pitago ở Trung Quốc	7
3. Hi Lạp cổ đại qua ba bài toán	9
4. <u>Yêu cầu <math>\times</math> Trái cây</u> = Các sản ra	11
Lập luận	
5. Máy tính "ngon xoè, ngon cụp".	12
6. Một nhà toán học giả điên	14
7. Nguồn gốc từ Algebra (Đại số)	15
8. Mỗi tình duyên nợ Toán - Thơ	16
9. Hindu ngày xưa qua vài bài toán cổ	18
10. Toán học và câu chuyện tình	19
11. Tại sao $\alpha, \beta, \gamma$ ?	21
12. Do chu vi Trái Đất bằng que và dây	22
13. Gần như chắc chắn có người trên sao hỏa	23
14. Các nghịch lí nổi tiếng của Zénon.	26
15. Những nghịch lí suy ra từ tiên đề chọn	28
16. Nghịch lí Giôn Valixơ.	30
17. Cái vòng luẩn quẩn	31
18. Nghịch lí của Galilê.	35
19. Nghịch lí của Galilê - Bánh xe Aristote.	36
20. Bài toán Hình học lớp 7 đã có cách giải 2000 năm.	37
21. Nhạc sĩ Môđa và con số 18.	38
22. Trạng Quỳnh Đức quốc Adam Riese thi vẽ	39
23. Từ con ruồi đến tọa độ Descartes	40
24. Làm thơ theo lối toán học	41
25. Josephine và bài toán chưa có lời giải	43
26. Một chứng minh tao nhã và lịch sự.	45
27. Hết ngày dài, lại đêm thâu.	46
28. Bài toán số 79 của bản Rhind	48
29. Số $\pi$ - lại số $\pi$ .	50
30. Bệnh cầu phương đường tròn.	52
31. Hậu sinh "khả ái".	53
32. Hermes và đa giác đều 65537 cạnh.	54
33. Khối đa diện đều : một màn huyền bí.	55
34. Lobachevski - Con người tư bỏ đường tròn	57
35. Ianốt Bôlai - Một thiên tài bị lãng quên.	58
36. Pascal, một cuộc đời đầy kịch tính.	60
37. Képler, nhà toán học, nhà thiên văn học bất hạnh.	61
38. Fibonaxi và bài toán thỏ đẻ con.	63
39. Cuộc đua tài của Fibonaxi	64

40.	Ghi công "gợi ý"	66
41.	Toán học và "phái yếu"	67
42.	Từ nhà toán học trở thành Đức Giáo hoàng	68
43.	Ôle : 48000 trang sách trong một đời người.	69
44.	Talét, người đầu tiên phát hiện ra nhật thực	71
45.	Oclit : Số lần tái bản chỉ thua kinh thánh.	71
46.	Bài toán cổ nhất về cấp số.	72
47.	Néper và lôgarit	73
48.	Sự ra đời của lôgarit	75
49.	Đối thủ của lôgarit	77
50.	Câu chuyện dãy số vô hạn và nghịch lý : $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1}{5} = \dots = \frac{1}{n}$	78
51.	Niuton : $\frac{1}{2}$ tốt hơn nhiều...	80
52.	Ghippa, người bạn đầu tiên của Tráng, Sao	82
53.	Mohr hay Mascheroni ?	83
54.	Có phải là ý nguyện của Gauxor ?	84
55.	Định lý Xôphia Grecmen	85
56.	Pitago và những con số linh thiêng.	86
57.	666 = kẻ thù của Chúa = Leo X	87
58.	Tam giác điều hòa Lepnitx.	89
59.	Bài toán Gôn bắc vẫn còn thách đố.	90
60.	15 tên cướp chết vì số 9	91
61.	Amen = 99.	93
62.	Bachet làm ảo thuật với 21 lá bài.	94
63.	Số hoàn chỉnh : một màn bí mật	97
64.	Lại một màn bí mật : Cấp số bạn bè	100
65.	Rủi ro con số 13.	103
66.	Chọn đồng hồ nào ?	104
67.	Một dấu phẩy giá bao nhiêu ?	105
68.	Mấy màu tô tốt bản đồ ?	106
69.	Ai vẽ bản đồ chính xác dấu hên ?	108
70.	Viet - Ông tổ của kí hiệu toán học.	109
71.	Ai phát minh ra một số kí hiệu toán học ?	110
72.	Lịch sử kí hiệu bằng nhau.	112
73.	Đôi mắt thần của Chuquet	113
74.	Hóa học và "cây" toán học	115
75.	Toán học trong sữa chua.	118
76.	Con ong - "Nhà toán học"	119
77.	Những con số của tượng Nữ thần tự do	121
78.	Bằng cách nào đi du lịch được nhiều nhất.	122
79.	Bài toán đất chó.	124
80.	Đồng hồ rạn nứt kiểu nào cho hên.	125
81.	Lấp lánh tài năng toán học.	126