

Minmax vs Maximin Strategies

Rimawan Pradiptyo

Department of Economics, Faculty of Economics and Business

Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia.

February 23, 2009

1 Minmax vs Maximin

		Player 2	
		A	B
Player 1	A	a_1, a_2	b_1, b_2
	B	c_1, c_2	d_1, d_2
		Game 1	

where: $a_1 + d_1 \neq b_1 + c_1, a_2 + d_2 \neq b_2 + c_2$

From players' perspectives, there are two possible methods to choose the optimum strategy which are minmax and maximin strategies. Starting by estimating the minmax strategies of the game, let p and q denote the probabilities that the players 1 and 2 chooses strategies 'A' and 'B', respectively. Consider U_1 and U_2 are players' 1 and 2 expected utilities, respectively, which are expressed as follows:

$$U_1(p, q) = pqa_1 + p(1 - q)b_1 + (1 - p)qc_1 + (1 - p)(1 - q)d_1 \quad (1)$$

$$U_2(p, q) = pqa_2 + p(1 - q)b_2 + (1 - p)qc_2 + (1 - p)(1 - q)d_2 \quad (2)$$

Differentiating U^1 and U^2 with respect to p and q , consecutively, we obtain the maximum conditions:

$$\frac{dU_1}{dp} = q(a_1 - c_1) + (1 - q)(b_1 - d_1) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dU_2}{dq} = p(a_2 - b_2) + (1 - p)(c_2 - d_2) = 0 \quad (4)$$

Equations (3) and (4) can be expressed as follows:

$$qa_1 + (1 - q)b_1 = qc_1 + (1 - q)d_1 \quad (5)$$

$$pa_2 + (1 - p)c_2 = pb_2 + (1 - p)d_2 \quad (6)$$

Let q^* and p^* denote the minmax (Nash) equilibrium probabilities of the game, respectively, and they can be expressed as follows:

$$q^* = \frac{d_1 - b_1}{a_1 - b_1 - c_1 + d_1}, 1 - q^* = \frac{a_1 - c_1}{a_1 - b_1 - c_1 + d_1} \quad (7)$$

$$p^* = \frac{d_2 - c_2}{a_2 - b_2 - c_2 + d_2}, 1 - p^* = \frac{a_2 - b_2}{a_2 - b_2 - c_2 + d_2} \quad (8)$$

where: $p^*, q^* \in (0, 1)$.

Substituting the values of q^* and p^* in equations (5) and (6), respectively we obtain the optimum expected utilities:

$$U_1^* = U_1(p, q^*) = q^*c_1 + (1 - q^*)d_1 = \frac{a_1d_1 - b_1c_1}{a_1 - b_1 - c_1 + d_1} \quad (9)$$

$$U_2^* = U_2(p^*, q) = p^*b_2 + (1 - p^*)d_2 = \frac{a_2d_2 - b_2c_2}{a_2 - b_2 - c_2 + d_2} \quad (10)$$

Another method of choosing strategies strategically is the use of maximin criterion. Given the utility functions U_1 and U_2 as defined in equations (1) and (2), then differentiating U_1 and U_2 with respect to q and p , consecutively, the following maximum conditions are obtained:

$$\frac{dU_1}{dq} = pa_1 - pb_1 + (1-p)c_1 - (1-p)d_1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{dU_2}{dp} = qa_2 + (1-q)b_2 - qc_2 - (1-q)d_2 = 0 \quad (14)$$

From the perspective of player 1 and player 2, the maximin payoffs are given, respectively, as follows:

$$pa_1 + (1-p)c_1 = pb_1 + (1-p)d_1 \quad (15)$$

$$qa_2 + (1-q)b_2 = qc_2 + (1-q)d_2 \quad (16)$$

Let p^+ and q^+ denote the probabilities of choosing strategies A and B based on maximin criterion, respectively. From players' 1 and 2 perspective, p^+ and q^+ are chosen such that they are indifferent towards the two strategies they are facing. The solutions from equations (15) and (16) are as follows:

$$\begin{aligned} p^+ &= \frac{d_1 - c_1}{a_1 - b_1 - c_1 + d_1}, 1 - p^+ = \frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_1 - c_1 + d_1} \\ q^+ &= \frac{d_2 - c_2}{a_2 - b_2 - c_2 + d_2}, 1 - q^+ = \frac{a_2 - b_2}{a_2 - b_2 - c_2 + d_2} \end{aligned} \quad (18)$$

The expected utilities from using maximin payoffs U_1^+ and U_2^+ can be obtained by substituting p^+ and q^+ to equations (15) and (16).

$$U_1^+ = U_1(p^+, q) = p^+b_1 + (1-p^+)d_1 = \frac{a_1d_1 - b_1c_1}{a_1 - b_1 - c_1 + d_1} = U^1(p, q^*) \quad (19)$$

$$U_2^+ = U_2(p, q^+) = q^+b_2 + (1-q^+)d_2 = \frac{a_2d_2 - b_2c_2}{a_2 - b_2 - c_2 + d_2} = U^2(p^*, q) \quad (20)$$

2 Latihan Soal

Tentukan maximin dan minmax strategies, serta expected utility equilibrium dari game di bawah ini:

1.

Player

2

	A	B
Player 1	A	B
	$a_1, -a_2$	$-a_1, a_2$
	$-a_1, a_2$	$a_1, -a_2$

Game 2

where: $a_1 = a_2$

2

Player

2

	A	B
Player 1	A	B
	$-a, -a$	$-b, c$
	$c, -b$	$-d, -d$

Game 3

where: $c > -a > -d > -b$

3.

Player

2

	A	B
Player 1	A	B
	a, a	$0, 0$
	$0, 0$	b, b

Game 4

where: $b > a$

4.

Player

2

	A	B
Player 1	A	B
	a, b	$0, 0$
	$0, 0$	b, a

Game 5

where: $a_1 = a_2$

5.

2

Player

		A	B
Player 1	A	a_1, a_2	b_1, b_2
	B	c_1, c_2	d_1, d_2

Game 6

where: $c_1 > a_1$, $b_1 > d_1$, $a_2 > b_2$, and $d_2 > c_2$.

LATIHAN SOAL GAME THEORY (PERSIAPAN UTS)

Pertanyaan 1

Identifikasi apakah game di bawah ini memiliki PSNE? Jika iya, tentukan PSNE tersebut dan tentukan bagaimana cara menemukan PSNE tersebut?

a. Pemain 2

	Kiri	Tengah	Kanan
Atas	20, 0	10, 2 PSNE	8, -4
Bawah	20, 2	10, 0	2, -2

Pemain 1

b. Pemain 2

	Kiri	Tengah	Kanan
Atas	0, 6	6, 0	8, 5
Pusat	6, 0	0, 6	8, 5
Bawah	5, 8	5, 8	9, 9 PSNE

Pemain 1

Pertanyaan 2

Pemain 2

	Kiri	Kanan
Atas	A1, A2	B1, B2
Pusat	C1, C2	D1, D2

Pemain 1

dimana : $C1 > A1$, $B1 > D1$, $A2 > B2$, dan $D2 > C2$

misal $a_2 = C1 = D2 = B1$
 $a_1 = C2 = D1 = B2$ MSNE = $\{1/2, 1/2\}$

- Identifikasi kemungkinan adanya pure strategy dan mixed equilibrium dari game diatas, dan tentukan equilibrium tersebut.
- Identifikasi kemungkinan adanya the first mover advantage maupun the last mover advantage dari game diatas.

Pertanyaan 3

- Jika di dalam suatu industri terdapat 2 perusahaan, masing-masing memiliki marginal cost = 0. Fungsi permintaan yang dihadapi oleh industri ini adalah:

$$P(Y) = 200 - Y$$

Di mana $Y = y_1 + y_2$ adalah total output.

- Jika kedua perusahaan berperilaku seperti dalam model Bertrand, tentukan titik keseimbangan output masing-masing perusahaan. $P = MC$
- Jika kedua perusahaan memutuskan untuk berkolusi, tentukan output masing-masing perusahaan. $q_1 = \frac{a-c}{2b}$ $q_2 = \frac{a-c}{2b}$
- Jika masing-masing perusahaan berperilaku mengikuti model Cournot, jelaskan asumsi apa yang akan digunakan oleh masing-masing perusahaan untuk menentukan pilihan optimal (reaction function) dari masing-masing perusahaan? $MR = MC$
- Tentukan pilihan optimal (reaction function) dari perusahaan 1 terhadap kemungkinan output dari perusahaan 2, dan demikian pula sebaliknya. Gunakan grafik untuk menggambarkan hasil anda.
- Tentukan kuantitas Cournot equilibrium output dari setiap perusahaan.

Maksimisasi profit
 Mengetahui fungsi biaya
 Tidak tahu strategi
 Perusahaan 1 akan
 memperkirakan
 output 2 bkg
 fungsi produksi

Stackelberg

Pertanyaan 4

- Berdasarkan Bertrand Oligopoly, solusi optimum dari masing-masing perusahaan adalah menentukan harga output sebesar marginal cost, yang itu artinya perusahaan akan memproduksi pada level yang mampu me-maximisasi keuntungan. Diskusikan dan jelaskan dengan grafik jika perlu.
- Pada quantity setting oligopoly, besarnya keuntungan yang diperoleh dari model kolusi, cournot, dan stackelberg model bisa dinyatakan dalam hubungan berikut : ProfitCollusion > ProfitStackelberg > ProfitCournot. Diskusikan dan gunakan grafik jika perlu.

Pertanyaan 5

- Jika game *prisoners' dilemma* dimainkan secara berulang dengan waktu terbatas (*finitely repeated games*), secara teoritis solusinya adalah bahwa semua pemain akan selalu memilih khianat daripada setia setiap saat. Diskusikan.
- Dalam sebuah eksperimen, *prisoners' dilemma* dimainkan one-shot dan simultan tanpa ada kemungkinan pemain untuk berkomunikasi. Berbagai hasil eksperimen menunjukkan bahwa strategi yang dipilih oleh peserta eksperimen tidak dipengaruhi oleh besaran *payoffs* dari game tersebut. Diskusikan.

Selamat Bekerja!

THPS